Une fonction entière non constante mais bornée sur toute droite passant par l'origine.

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

19 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction entière non constante mais bornée sur toute droite passant par l'origine.***

Bak & Newman, C.Zuily ref. ? ?

On pose pour $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{zt}}{t^t} dt.$$

1. *Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{C}$.*
2. *Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et y vérifie $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.*
3. *On désigne par $\log$ la fonction logarithme définie dans le demi-plan $U = \{z = x + iy\ :\ x+y > 0\}$ qui coïncide avec le logarithme usuel sur le demi-axe réel positif et par $w \mapsto w^w$ la fonction holomorphe sur U égale à $\exp(w \log(w))$. Soient enfin C_r et C_ε les quarts de cercles de rayon respectivement r et ε centrés à l'origine dans le premier quadrant. En intégrant la fonction $w \mapsto \dfrac{\exp(wz)}{w^w}$ sur le contour ci-contre, montrer que*
$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(itz)}{\exp(it\log(t) - t\frac{\pi}{2})} - \lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{\exp(wz)}{w^w} dw.$$
4. *Pour $z = x + iy$ avec $y = \frac{\pi}{2} + C$ où $C > 0$. Montrer que la première intégrale est majorée par C^{-1} et en déduire que $|f(z)| \leq C^{-1}$. Montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour $|\mathrm{Im}(z)| \geq \pi$.*
5. *Soit $g(z) = f(z - 2i\pi)$. Montrer que g est bornée sur toute demi-droite issue de l'origine et holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
6. *Montrer que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(x + 2i\pi)| = +\infty$.*

Références