Une fonction entière prenant des valeurs réelles sur deux droites sécantes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction entière prenant des valeurs réelles sur deux droites sécantes***

On suppose qu'une fonction entière non constante f ne prends que des valeurs réelles sur deux droites sécantes du plan complexe.

Montrer que l'angle formé par ces deux droites est un multiple rationel de π.

Solution : *Si les deux droites s'intersectent au point a, quitte à considérer $g(z) = f(z+a) - f(z)$, on peut supposer que $a = f(a) = 0$.*

On a alors $f(z) = bz^n(1 + o(1))$ lorsque $z \to 0$ avec $b \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. En particulier, f est sans zéros sur un voisinage épointé de l'origine (ou bien, invoquer les zéros isolés). Soient $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ les vecteurs directeurs de nos deux droites, pour $t \in \mathbb{R}$ $f(te^{i\alpha})$ et $(te^{i\beta})$ sont réels ; il en est donc de même de

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(te^{i\alpha})}{f(te^{i\beta})} = \lim_{t \to 0} \frac{ce^{in\alpha}t^n(1 + o(1))}{ce^{in\beta}t^n(1 + o(1))} = e^{in(\alpha - \beta)}$$

i.e. $in(\alpha - \beta) \in i\pi\mathbb{Z}$, finalement $\alpha - \beta \in \pi\mathbb{Q}$.

Références