Une preuve « presque holomorphe » du théorème de Cayley-Hamilton

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une preuve « presque holomorphe » du théorème de Cayley-Hamilton***

D'après Charles A. McCarthy , [1], "The Cayley-Hamilton Theorem", The American Mathematical Monthly, 82 (4), 1975, p. 390–391

1. *Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe, $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que*
$$\forall\, r \geq R \ : \ A^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^{k+1} \left(re^{it} Id - A\right)^{-1} dt.$$
2. *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*

Solution :

1. *Si nous munissons $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| := \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leq i,j \leq n\},\ A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$, on vérifie par une récurrence élémentaire que*
$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}),\ k \in \mathbb{N}^\star \ : \ \|A^k\| \leq n^{k-1}\|A\|^k.$$
Ces inégalités assurent que le rayon de convergence de la série entière $\sum_k \|A^k\| z^k$ est supérieur ou égal à $(n\|A\|)^{-1}$ et par suite, la série de matrices $\sum_k \zeta^{-(k+1)} A^k$ converge dans $M_n(\mathbb{C})$ normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, n\|A\|)}$. On vérifie alors (classiquement)
$$(\zeta I_n - A)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-(k+1)} A^k\right) = \lim_{N\to\infty}\left(I_n - \zeta^{-(N+1)} A^{N+1}\right) = I_n,\ \forall\, |\zeta| > n\|A\|.$$
Autrement dit
$$\begin{cases} \zeta I_n - A \in GL_n(\mathbb{C}), & \forall\, |\zeta| > n\|A\| \\ (\zeta I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-(k+1)} A^k, & \forall\, |\zeta| > n\|A\|. \end{cases}$$

La normale convergence sur tout cercle $C(0,r),\ r > n\|A\|$ assure l'échange $\int\sum = \sum\int$ ci-dessous

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\zeta^k(\zeta I_n - A)^{-1}d\zeta &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\zeta^k\left(\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^{-(l+1)}A^l\right)d\zeta\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}A^l\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\zeta^{k-l-1}d\zeta\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}A^l\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{i\theta}\right)^{k-l-1}ire^{i\theta}d\theta\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}r^{k-l}A^l\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta(k-l)}d\theta\\ &= A^k,\quad \forall k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

2. *Cette formule étant vérifiée pour tout entier k, la linéarité de l'intégrale nous assure que*

$$P(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}P(\zeta)(\zeta I_n - A)^{-1}d\zeta,\quad \forall\,P\in\mathbb{C}[z],\quad r > n\|A\|.$$

(remarquer l'analogie avec la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\frac{f(u)}{u-z}du,\ |z| < r$, ici $\|A\| \leq n\|A\| < r$....)
En particulier pour le polynôme caractéristique de A : $P(z) = P_A(z) = \det(zI_n - A)$ (ou $\det(A - zI_n)$ selon l'usage)

$$P_A(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}P_A(\zeta)(\zeta I_n - A)^{-1}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}\det(\zeta I_n - A)(\zeta I_n - A)^{-1}d\zeta,$$

comme

$$(\zeta I_n - A)^{-1} = [\det(\zeta I_n - A)]^{-1}\ {}^t\mathrm{com}(\zeta I_n - A) = [\det(\zeta I_n - A)]^{-1}\left((C_{i,j}(\zeta))\right)$$

*où $C_{i,j}(\zeta)$ est le cofacteur d'indice j,i de $\zeta I_n - A$, **donc** un polynôme en ζ, donc d'**intégrale nulle** sur tout cercle $C(0,r)$, nous avons finalement*

$$P_A(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)}((C_{i,j}(\zeta)))d\zeta = 0$$

i.e.

$$P_A(A) = 0,\quad \forall\,A\in M_n(\mathbb{C}).$$

Le théorème de Cayley-Hamilton est bien démontré.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.