Le théorème de Rolle version holomorphe

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

15 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Le théorème de Rolle version holomorphe***

J.C. Evard & F. Jafari « A complex Rolle's theorem », [1], 99, 1992 ou plus simplement [2].

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert convexe $D \subset \mathbb{C}$, pour $a \neq b \in D$ vérifiant $f(a) = f(b)$, montrer qu'il existe

$$z_1, z_2 \in]a, b[= \{\, a + t(b-a),\ 0 < t < 1 \,\}$$

vérifiant

$$\mathrm{re}(f'(z_1)) = im(f'(z_2)) = 0.$$

Solution : *Si $a = a_1 + ia_2,\ b = b_1 + ib_2$ considérons l'application φ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(t) = \langle\, f(a+t(b-a)), b-a\,\rangle_{\mathbb{C}} = re\,(f(a+t(b-a))\,(b_1-a_1) + im\,(f(a+t(b-a))\,(b_2-a_2),$$

vu les hypothèses, φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi(0) = \varphi(1)$; par Rolle, il existe donc $t_1 \in]0,1[$ vérifiant $\varphi'(t_1) = 0$ et par un calcul classique :

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(t_1) &= (b_1-a_1)\big(\partial_x \mathrm{re}(f)(a+t_1(b-a))(b_1-a_1) + \partial_y \mathrm{re}(f)(a+t_1(b-a))(b_2-a_2)\big) \\ &\quad + (b_2-a_2)\big(\partial_x \mathrm{im}(f)(a+t_1(b-a))(b_1-a_1) + \partial_y \mathrm{im}(f)(a+t_1(b-a))(b_2-a_2)\big) \end{aligned}$$

si bien qu'avec les équations de Cauchy-Riemann il reste (avec $z_1 = a + t_1(b-a)$...)

$$0 = \varphi'(t_1) = ((b_1-a_1)2 + (a_2-b_2)2)\,\partial_x \mathrm{re}(f)(z_1)$$

a et b étant distincts on a donc $\partial_x \mathrm{re}(f)(z_1) = 0$ avec $z_1 \in]a,b[$. Il reste encore une fois à utiliser Cauchy-Riemann pour remarquer que $\mathrm{re}(f')(z) = \mathrm{re}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right) = re\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right) = \partial_x \mathrm{re}(f)(z)$ et conclure. Pour la partie imaginaire on remplace f par $-if$.

Remarques : *- Le théorème de Rolle est faux pour une fonction à valeurs vectorielles : par exemple la fonction* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *(ou bien* $f(t) = e^{it}$*) définie par* $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *qui vérifie* $f(0) = f(2\pi)$ *mais sa différentielle n'est jamais nulle sur* $[0, 2\pi]$.

- Pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe ce résultat négatif à fortiori subsiste (c.f.* $f(z) = e^z$ *où* $|f'(z)| = |e^z| \neq 0$*)*

toutefois comme le précise cet exercice, l'holomorphie (si f *est seulement* $\mathscr{C}^\infty$ *c'est sans espoir) permet de conserver le résultat pour les parties réelles et imaginaires de la fonction.*

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.

[2] E. Amar and E.Matheron. Analyse Complexe. Cassini, 2004.