Calcul de $\zeta(2)$ par la méthode des résidus

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 $\bigstar$ ***Calcul de*** $\zeta(2)$ ***par la méthode des résidus***

Appliquer convenablement le théorème des résidus à la fonction méromorphe $f(z) = \pi z^{-2}\text{cotan}(\pi z)$ *pour en déduire la valeur de* $\zeta(2) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Solution : *L'ensemble des pôles de* f *est* $\mathbb{Z}$ *et après un calcul classique, le résidu de* f *à l'origine vaut* $\text{res}(f,0) = -\frac{\pi^2}{3}$ *et en un entier* $n \in \mathbb{Z}^\star$: $\text{res}(f,n) = \frac{1}{n^2}$.

Soit γ_N $(N \geq 1)$ *le contour rectangulaire de sommets* $(\pm 1 \pm i)(N+\frac{1}{2})$, *par le théorème des résidus*

$$-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N} f(z)dz := I_n.(\bigstar)$$

Maintenant pour $\pi z = x + iy \in \mathbb{C}$ *un petit calcul nous donne*

$$|cotan(\pi z)|^2 = \frac{\cos^2(x) + sh^2(y)}{\sin^2(x) + sh^2(y)},$$

soit, si z *parcourt les cotés verticaux de* γ_N

$$|cotan(\pi z)|^2 = \frac{sh^2(y)}{\sin^2(x) + sh^2(y)} < 1$$

alors que sur les cotés horizontaux

$$|cotan(\pi z)|^2 = \frac{1 + sh^2(\pi(N+\frac{1}{2}))}{sh^2(\pi(N+\frac{1}{2}))} = coth^2(\pi(N+\frac{1}{2})) \leq coth^2(\frac{\pi}{2})$$

si bien que $z \mapsto |cotan(\pi z)|$ *est uniformément (en* N *))bornée sur tout contour* γ_N *par* $coth(\frac{\pi}{2})$ *et par suite*

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star \quad : \quad |f(z)| \leq \frac{\pi coth(\frac{\pi}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2}, \quad \forall\, z \in \gamma_N.$$

Estimation qui assure

$$|I_N| \leq \frac{8\pi coth(\frac{\pi}{2})(N+\frac{1}{2})}{2\pi(N+\frac{1}{2})^2} \longrightarrow 0 \quad si \quad N \to +\infty.$$

avec $(\bigstar)$ *on tire aussitot* $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Références