Baireries dans $\mathscr{O}(\Omega)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

12 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Baireries dans*** $\mathscr{O}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert non vide et distinct de $\mathbb{C}$. Pour $a \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega,\ r \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on note :

$$\mathscr{E}_n := \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega)\ :\ |f(z)| \leq n,\ \forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega\,\}\,.$$

1. *Pour $f \in \mathscr{E}_n$, si $(z_k)_k$ est une suite dans Ω convergente vers a on pose*

$$f_k(z) = 2n + \frac{z - z_k}{z - a}\,(f(z) - 2n) = f(z) + \frac{z_k - a}{z - a}(2k - f(z)), \quad z \in \Omega.$$

   Montrer que la suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\mathscr{O}(\Omega)$.
2. *Montrer que $\mathscr{E}_n$ est d'intérieur vide dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*
3. *Montrer que $\mathscr{E}_n$ est fermé dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*
4. *En déduire que l'ensemble $\mathscr{O}(\Omega) \cap L^\infty(D(a,r))$ est maigre dans $\mathscr{O}(\Omega)$.*
5. *Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ analytiquement prolongeables à un ouvert strictement plus grand que Ω est un partie maigre de $\mathscr{O}(\Omega)$. En déduire que $\mathscr{G} := \mathscr{O}(\Omega) \setminus \mathscr{F}$ est non maigre et partout dense.*
6. *Montrer que $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{G} + \mathscr{G}$ (considérer pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ l'application $T_f\ :\ \mathscr{G} \ni g \mapsto f - g \in \mathscr{O}(\Omega)$ ....).*

Solution :

1. *Il est suffisant de montrer que la suite $(f_k)_k$ converge uniformément sur toute boule fermée $\overline{B(b,\delta)} \subset \Omega$. Comme $a \in \partial\Omega$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que*

$$|z - a| \geq \delta_0,\ \forall\, z \in \overline{B(b,\delta)}\ ;$$

   il existe aussi une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{z \in \overline{B(b,\delta)}} |2n - f(z)| \leq C.$$

   Ces deux inégalités impliquent que

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f(z)| &= \left|\frac{z_k - a}{z - a}\right| \cdot |2n - f(z)| \\ &\leq |z_k - a| \cdot \frac{C}{\delta_0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

pour tout $z \in \overline{B(b,\delta)}$. *on a donc*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in\overline{B(b,\delta)}} |f_k(z) - f(z)| = 0$$

la suite $(f_k)_k$ *est bien uniformément convergente vers* f *sur tout disque* $\overline{B(b,\delta)} \subset \Omega$ *i.e.* $f_k \to f$ *dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.

2. *Vérifions que pour toute fonction* $f \in \mathscr{E}_n$ *on a* $f_k \notin \mathscr{E}_n$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *Pour cela on peut écrire*

$$\begin{aligned} |f_k(z)| &\geq -|f(z)| + \left|\frac{z-z_k}{z-a}\right| \cdot |f(z) - 2n| \\ &\geq -|f(z)| + \left|\frac{z-z_k}{z-a}\right| \cdot (2n - f(z)), \quad \forall\, z \in \Omega \\ &\geq -p + \left|\frac{z-z_k}{z-a}\right| \cdot (2n - n), \quad \forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega \\ &\geq -p + \left|\frac{z-z_k}{z-a}\right| \cdot n \underset{z\to a}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

les applications f_k *ne sont donc pas bornées sur* $D(a,r) \cap \Omega$: $f_k \notin \mathscr{E}_n$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *Mais comme* $f_k \to f$ *dans* $\mathscr{O}(\Omega)$, *la fonction* f *n'est pas intérieure à* $\mathscr{E}_n$; f *étant arbitraire, chaque ensemble* $\mathscr{E}_n$ *est d'intérieur vide.*

3. *Une suite* $(g_k)_k \subset \mathscr{E}_n$ *convergente dans* $\mathscr{O}(\Omega)$ *vers une fonction* g *converge en particulier simplement sur* Ω *et donc sur* $D(a,r) \cap \Omega$. *Ainsi,* $\forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega$,

$$\big(|g_k(z)| \leq n \quad \& \quad \lim_k g_k(z) = g(z)\big) \Longrightarrow |g(z)| \leq n$$

soit $g \in \mathscr{E}_n$ *qui est bien fermé dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.

4. *Vu ce qui précède,*

$$\mathscr{O}(\Omega) \cap L^\infty(D(a,r)) = \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \text{ et bornes sur D(a,r)} \cap \Omega \,\} = \bigcap_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \mathscr{E}_{\mathrm{n}}$$

est maigre dans $\mathscr{O}(\Omega)$ *comme réunion des ensembles rares* $\mathscr{E}_n$.

5. *Soit* $f \in \mathscr{F}$, *il existe un domaine* $\Delta_f \underset{\neq}{\supset} \Omega$ *tel que* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$; *il existe donc* $a \in \partial\Omega, r > 0$, *tels que* $\overline{D}(a,r) \subset \Delta_f$ *et par suite* f *est bornée sur* $D(a,r)$, *donc sur* $D(a,r) \cap \Omega$: *il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $f \in \mathscr{E}_{n,a} := \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \;:\; |f(z)| \leq n,\ \forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega \,\}$. *On considère alors une partie dénombrable dense* $A \subset \partial\Omega$ *et la suite* $(D_n)_n$ *des disques centrés en* $a \in A$ *à rayons rationnels et enfin les ensembles*

$$\mathscr{E}_n^l := \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \;:\; |f(z)| \leq n,\ \forall\, z \in D_l \cap \Omega \,\}.$$

Vu ce qui précède, les ensembles $\mathscr{E}_n^p$ *sont rares et* $\mathscr{F} \subset \bigcup_{n,l} \mathscr{E}_n^l$ *est donc maigre.*
$\mathscr{O}(\Omega)$ *étant un espace de baire,* $\mathscr{F}$ *maigre implique que* $\mathscr{G} = \mathscr{O}(\Omega) \setminus \mathscr{F}$ *est non maigre et partout dense.*

6. *Soit* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *et considérons l'application* Λ_f $\mathscr{O}(\Omega) \ni g \mapsto \Lambda_f(g) = f - g$. *C'est un isomorphisme topologique de* $\mathscr{O}(\Omega)$ *et par conséquent* $\Lambda_n(\mathscr{G})$ *est une partie non maigre de* $\mathscr{O}(\Omega)$ *; en particulier* $\Lambda_n(\mathscr{G}) \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$. *Il existe donc* $g \in \mathscr{G}$ *tel que* $h = \Lambda_f(g) = f - g \in \mathscr{G}$. f *étant arbitraire, on a bien* $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{G} + \mathscr{G}$.

Références