Baireries dans $\mathscr{O}(\Omega)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

9 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Baireries dans*** $\mathscr{O}(\Omega)$

Soit Ω *un ouvert non vide et distinct de* $\mathbb{C}$. *Pour* $a \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $r \in \mathbb{R}_+^\star$ *et* $n \in \mathbb{N}^\star$ *on note :*

$$\mathscr{E}_n := \{\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \ : \ |f(z)| \leq n, \ \forall\, z \in D(a,r) \cap \Omega \,\}\,.$$

1. *Pour* $f \in \mathscr{E}_n$, *si* $(z_k)_k$ *est une suite dans* Ω *convergente vers* a *on pose*

$$f_k(z) = 2n + \frac{z - z_k}{z - a}\,(f(z) - 2n) = f(z) + \frac{z_k - a}{z - a}(2k - f(z)), \quad z \in \Omega.$$

   Montrer que la suite $(f_k)_k$ *converge vers* f *dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.
2. *Montrer que* $\mathscr{E}_n$ *est d'intérieur vide dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.
3. *Montrer que* $\mathscr{E}_n$ *est fermé dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.
4. *En déduire que l'ensemble* $\mathscr{O}(\Omega) \cap L^\infty(D(a,r))$ *est maigre dans* $\mathscr{O}(\Omega)$.
5. *Montrer que l'ensemble* $\mathscr{F}$ *des fonction* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *analytiquement prolongeables à un ouvert strictement plus grand que* Ω *est un partie maigre de* $\mathscr{O}(\Omega)$. *En déduire que* $\mathscr{G} := \mathscr{O}(\Omega) \setminus \mathscr{F}$ *est non maigre et partout dense.*
6. *Montrer que* $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{G} + \mathscr{G}$ *(considérer pour* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *l'application* $T_f \ : \ \mathscr{G} \ni g \mapsto f - g \in \mathscr{O}(\Omega)$ *....).*

Références