L'équation fonctionnelle de d'Alembert $2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'équation fonctionnelle de d'Alembert*** $2f(x)f(y) = f(x+y)+f(x-y)$

Déterminer les solutions continues de l'équation fonctionnelle de d'Alembert

$$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y).(\star)$$

Solution : *Si une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle $(\star)$ alors, en faisant $x = y = 0$ il vient $2f(0)^2 = 2f(0)$ soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. De là si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$0 = 2f(x)f(0) = f(x+0) + f(x-0) = 2f(x),$$

f est donc identiquement nulle.

Nous excluons dorénavant ce cas, et supposons donc que $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 1$, pour $x = 0$ l'équation $(\star)$ devient

$$2f(y) = 2f(y)f(0) = f(0+y) + f(0-y) = f(y) + f(-y)$$

i.e.

$$f(y) = f(-y), \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

f est donc paire.

f étant supposée continue sur $\mathbb{R}$, elle y est locament intégrable ; par conséquent, on a pour tout $t > 0$

$$\int_{-t}^{t} 2f(x)f(y)dy = \int_{-t}^{t} f(x+y)dy + \int_{-t}^{t} f(x-y)dy,$$

soit, aprés un changement de variable dans les intégrales de droite

$$2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.(1)$$

Remarquons que dans (1), le second membre est une fonction dérivable de la variable x, il en donc de même pour le terme de gauche et f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En réitérant ce processus, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis de proche en proche $\mathscr{C}^\infty$. Il est donc légitime de dériver (1) :

$$2f'(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\left[f(x-t)-f(x-t)\right]$$

qui donne pour $x=0$

$$2f'(0)\int_{-t}^{t} f(y)dy = 2\left[f(-t)-f(-t)\right] = 0, \quad \forall\, t>0, .(2)$$

car f est une fonction paire ; mais aussi comme $f(0)=1$, la continuité de f nous assure qu'il existe $t>0$ tel que

$$\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0.(2)$$

Si dans (3), on choisit $t>0$ assez petit pour que (2) soit valide, on en déduit

$$f'(0)=0.$$

Dérivons maintenant deux fois ($\star$) par rapport à la variable y, on obtient

$$2f(x)f''(y) = f''(x+y)+f''(x-y)$$

qui pour $y=0$ donne

$$2f(x)f''(0) = 2f''(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

En posant $C=f''(0)$, les solutions de l'équation fonctionnelle ($\star$) sont aussi solutions de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}) \qquad \begin{cases} f''(x) & = Cf(x), \quad x\in\mathbb{R}, \\ f(0) & = 0, \\ f'(0) & = 1. \end{cases}$$

Suivant C on a trois types de solutions

$$f(x) = \begin{cases} C_1x+C_2 \quad \textit{si} \;\; C=0 \\ C_1\mathrm{sh(cx)}+\mathrm{C_2ch(cx)} \quad \textit{si} \;\; \mathrm{C}>0 \; \textit{avec} \;\; \mathrm{c}=\sqrt{\mathrm{C}} \\ C_1\sin(cx)+C_2\cos(cx) \quad \textit{si} \;\; C<0 \;\; \textit{avec} \;\; c=\sqrt{-C}. \end{cases}$$

avec les conditions initiales $f(0)=1,\ f'(0)=0$, les solutions de ($\mathscr{E}$) sont finalement

$$f\equiv 0, \quad f\equiv 1, \quad f(x)=\mathrm{ch(cx)}, \quad \mathrm{f(x)=\cos(cx)}.$$

Réciproquement, on montre qu'elles sont bien des solutions de l'équation fonctionnelle ($\star$).

Références