Étude de $y' = \exp(-xy)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Étude de** $y' = \exp(-xy)$
([1]-107).
Montrer que la solution maximale f du problème de Cauchy

$$y' = \exp(-xy), \quad y(0) = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

est impaire, définie sur $\mathbb{R}$ et admet en $+\infty$ une limite $l \in [1, 1 + e^{-1}]$.

Solution : *- Redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy $(\mathscr{E})$ admet une solution maximale f définie sur un **intervalle ouvert** I contenant l'origine.*

- Pour $x \in -I$ posons $g(x) = -f(-x)$, g est encore solution de $(\mathscr{E})$, f étant maximale : $-I \subset I$ et $f_{/-I} = g$ soit $-I = I$ & $f = g$ i.e. f est **impaire** *et $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $0 < \alpha \leq +\infty$.*

Si $\alpha < +\infty$ de $f'(x) = \exp(-xf(x))$ sur I on peut dire que f est strictement croissante sur I. On peut aussi dire que $0 \leq f'(x) \leq 1$, avec $f(0) = 0$, et si on intègre cette inégalité sur $[0, x]$ il vient :

$$\forall\, x \in I,\ x \geq 0 \implies 0 \leq f(x) \leq x. \qquad (\bigstar)$$

f est donc croissante sur $I = [-\alpha, , \alpha]$, majorée par α, elle admet donc une limite en α_- vérifiant

$$0 \leq \lim_{x \to \alpha_-} f(x) = \lambda \leq \alpha$$

Il suffit maintenant de poser $f(\alpha) = \lambda$ et de vérifier (sans peine) que ce prolongement qui est C^1 fournit une solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-\alpha, \alpha]$ qui contredit la maximalité de f (en effet par Cauchy-Lipschitz, un tel phénomène assure que la solution maximale est définie sur un intervalle ouvert J contenant strictement $]-\alpha, \alpha]$ (et donc I) ce qui contredit la définition de f...). En conclusion, la solution maximale est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \geq 1$, f strictement croissante, positive sur $[1, +\infty[$ implique

$$0 < f'(x) \leq \exp(-xf(1)).$$

f' est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et par suite f admet une limite l en $+\infty$ ($f(x) = \int_0^x f'(t)dt$...). Alors

$$(f'(x) = \exp(-xf(x)) \quad \& \quad f(x) < l,\ \forall\, x \geq 1) \Longrightarrow (f'(x) > \exp(-xl),\ x \geq 1)$$

et

$$\Longrightarrow \quad \left(l = \int_0^{\infty} f'(t)dt > \int_0^{\infty} \exp(-tl)dt = \frac{1}{l} \right) \Longrightarrow \quad l > 1$$

Enfin, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 1$:

$$x > a \quad \Longrightarrow f'(x) < \exp(-x)$$

i.e.

$$1 - l = \int_a^{\infty} f'(t)dt < \int_a^{\infty} e^{-t}dt = e^{-a}$$

mais, vu ($\bigstar$), $1 = f(a) \leq a$, et finalement

$$l \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.