Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

26 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer qu'il existe une et une seule sphère $\mathcal{S}$ *tangente en* $A\,(1,2,1)$ *à la droite* $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x+y-2z & =1 \\ 2x-y-3z & =-3 \end{cases}$ *et tangente en* $A'\,(1,-1-2)$ *à la droite* $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} 2x+y+2z & =-3 \\ x-y-z & =4 \end{cases}$. *On déterminera son centre et son rayon.*

Solution : *Supposons qu'une telle sphère* $\mathcal{S}$ *existe. Notons* $\Omega\,(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ *son centre. En utilisant les équations cartésiennes de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$*, on calcule* $\overrightarrow{u}=(-5,-1,-3)$ *un vecteur directeur de* $\mathcal{D}$ *et* $\overrightarrow{u}'=(1,4,-3)$ *un vecteur directeur de* $\mathcal{D}'$. *Comme les deux droites sont tangentes à la sphère, on doit avoir* $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{u}=0$ *et* $\overrightarrow{\Omega A'}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ *ce qui amène les deux équations :* $5x_\Omega+y_\Omega+3z_\Omega=10$ *et* $x_\Omega+4y_\Omega-3z_\Omega=3$. *Comme* $A, A'\in\mathcal{S}$*, on doit aussi avoir* $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|=\left\|\overrightarrow{\Omega A'}\right\|$ *ce qui amène l'équation :* $y_\Omega+z_\Omega=0$. *On résout alors le système :*

$$\begin{cases} 5x_\Omega+y_\Omega+3z_\Omega & =10 \\ x_\Omega+4y_\Omega-3z_\Omega & =3 \\ y_\Omega+z_\Omega & =0 \end{cases}$$

et on trouve $\Omega\,(76/37, 5/37, -5/37)$. *On en déduit que le rayon de* $\mathcal{S}$ *est* $\frac{3}{37}\sqrt{894}$. *Réciproquement, on vérifie que cette sphère convient.*

Références