Étude de $xy' = x + y^2$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Étude de*** $xy' = x + y^2$

[1]
On considère l'équation différentielle

$$xy' = x + y^2, \quad x \in \mathbb{R}_+^\star (\bigstar)$$

1. *Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés.*
2. *Montrer que toute solution maximale possède un intervalle de définition qui est soit de la forme* $]a, b[,\ a > 0$ *(étudier alors le comportement de la solution en* a *et* b*) soit de la forme* $]0, b[$ *(étudier alors le comportement de la solution en* 0 *et* b*).*

Solution :

1. *Soit* (I, φ) *une solution de* $(\bigstar)$ *et* a *un point intérieur à* I *(donc* $a > 0$*). Pour* $x \in I \cap]a, +\infty[$ *:*

$$\forall\, t \in [a, x] \quad : \quad \frac{1}{t} \leq \frac{\varphi'(t)}{t + \varphi^2(t)} \leq \frac{\varphi'(t)}{a + \varphi^2(t)}$$

en intégrant sur $[a, x]$

$$\log\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\arctan\left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{a}}\right) - \arctan\left(\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a}}\right)\right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

si bien que

$$\forall\, x \in I \cap]a,+\infty[\quad : \quad x \leq a e^{\frac{\pi}{\sqrt{a}}}.$$

I est donc majoré et finalement borné.

2. *L'application $(x,y) \longmapsto \frac{1}{x}(x+y^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$; le théorème de Cauchy-Lipschtiz assure donc que les solutions maximales de $(\bigstar)$ sont définies sur des intervalles ouverts. Vu la question précédente ils sont donc de la forme $I =]a,b[$ avec $a > 0$ ou $]0,b[$ avec $0 < b < +\infty$.*
Soit donc (I,φ) une solution maximale, $\forall\, t \in I\,$: $\varphi'(t) > 0$, φ est donc strictement croissante sur I et admet donc aux extrémités de l'intervalle des limites (finies ou infinies).
Au voisinage de b : si φ admet une limite finie L au point b, alors $\varphi'(t) = \frac{1}{t}(t+\varphi^2(t))$ admet en b la limite $l = \frac{1}{b}(b+L^2)$ et le théorème de prolongement des applications de classe $\mathscr{C}^1$ vous assure que si on prolonge φ au point b en posant $\varphi(b) = L$, φ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ avec $\varphi'(b) = \frac{1}{b}(b+L^2) = \frac{1}{b}(b+\varphi^2(b))$ si bien que $(]a,b],\varphi)$ est encore solution de $(\bigstar)$ contredisant bien évidemment la maximalité de $(]a,b[,\varphi)$. Nécessairement : $\lim_{t\to b_-}\varphi(t) = +\infty$.
Le même raisonemmment montrer que si $I =]a,b[$ avec $a > 0$, alors $\lim_{t\to a_+}\varphi(t) = -\infty$
Supposons maintenant que $I =]0,b[$, soit $\eta \in I$ et $x \in]0,\eta]$. On a

$$\forall\, t \in [x,\eta] \quad : \quad t\varphi'(t) \geq \varphi^2(t)$$

soit

$$\forall\, t \in [x,\eta] \quad : \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \geq \frac{1}{t}$$

et en intégrant sur $[x,\eta]$

$$\forall\, x \in]0,\eta] \quad : \quad \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(\eta)} \geq \log\left(\frac{\eta}{x}\right)$$

mais le terme de droite tends vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0_+, il en est donc de même du terme de gauche ce qui nécessite $\lim_{t\to 0_+}\varphi(t) = 0$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.