

Étude de $y' = y^2 \sin^2(y)$

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Étude de $y' = y^2 \sin^2(y)$

[1]

Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = y^2 \sin^2(y) (\star)$$

sont bornées et définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution : La fonction $f(x, y) = y^2 \sin^2(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale φ de $(\star)$ vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$.

Il y a des fonctions constantes solutions de notre équation, ce sont les fonctions $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant une solution maximale φ non constante définie sur un intervalle $]a, b[$; vu ce qui précède, $\varphi([a, b]) \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi([a, b]) \subset]k_0\pi, (k_0 + 1)\pi[$ et toute solution maximale est bornée.

Supposons $b < +\infty$, la fonction φ étant croissante ($y' = y^2 \sin^2(y) \geq 0 \dots$) et majorée, φ admet une limite finie en b prolongons ainsi continuellement φ à $]a, b]$. Le prolongement ψ est continu sur $]a, b]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $\psi'(x)$ admet une limite (égale à $\psi^2(b) \sin^2(\psi(b))$) lorsque x tends vers b_- . Dans ces conditions, il est classique que ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ contradiquant la maximalité de φ . La seule alternative est donc $b = +\infty$. On montre de même que $a = -\infty$.

Remarque : La fonction φ croissante majorée a une limite l en $+\infty$. Si $l \notin \pi\mathbb{Z}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = l^2 \sin^2(l) > 0$ ce qui est absurde puisque φ est bornée (exercice...) : ainsi $l \in \pi\mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = l = (k_0 + 1)\pi$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = k_0\pi$.

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.