

# Extrêmes et convexité

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

17 janvier 2023

## Exercice 0.1 ★ Extrêmes et convexité

([1], sujet 8.)

① (**préliminaire**) Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$  d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $a \in U$  tel que  $Df(a) = 0$  et  $D^2f(a)(u, u) \geq 0$  pour tout  $u$  dans un voisinage  $V$  de  $a$  et pour tout  $u \in E$ . Montrer que  $f$  présente un minimum local au point  $a$ .

Dans l'espace de Hilbert  $l^2(\mathbb{N})$  des suites de réels de carré intégrable on pose pour  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$  :

$$g(x) = (x_n^2)_{n \geq 1}, \quad f(x) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right).$$

- ② Montrer que  $g \in \mathcal{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), l^2(\mathbb{N}))$  et préciser  $dg(x)(h)$ ,  $\forall x, h \in l^2(\mathbb{N})$
- ③ Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $g$  et du produit scalaire.
- ④ Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ .
- ⑤ Préciser  $Df(x)$ ,  $\forall x \in l^2(\mathbb{N})$  et vérifier que la suite nulle  $0_{l^2}$  est un point critique de  $f$ .
- ⑥ Calculer  $D^2f(x)$ ,  $\forall x \in l^2(\mathbb{N})$  et vérifier que

$$\forall h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2}\} : D^2f(0_{l^2})(h, h) > 0.$$

⑦ Soit  $\varepsilon > 0$  et  $x_\varepsilon = (x_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $x_n = 0 \forall n \neq n_0 := E(2/\varepsilon) + 1$  et  $x_{n_0} = \varepsilon/2$ . Montrer que  $f(x_\varepsilon) < 0$ . Calculer  $\|x_\varepsilon\|_2$  et en déduire que l'origine  $0_{l^2}$  n'est pas un minimum local de  $f$ . Commentaire ?

### Solution :

1. Soit  $\delta > 0$  tel que  $B(a, \delta) \subset V$ . La formule de Taylor avec reste intégral ([?], théorème 6.3 page 279) assure que pour tout  $h \in E$  vérifiant  $[a, a + h] \subset U$

$$f(a + h) - f(a) - Df(a)(h) = f(a + h) - f(a) = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} D^2f(a + th)(h, h) dt$$

Alors  $\|h\| < \delta$  implique  $[a, a + h] \subset V$ , et l'hypothèse sur  $D^2f$  assure la positivité du terme de droite dans la formule de Taylor. Soit

$$f(b) \geq f(a), \quad \forall b \in B(a, \delta),$$

le point  $a$  est bien un minimum local de  $f$ .

2. Il est clair que  $g(x) \in l^2(\mathbb{N})$  pour tout  $x \in l^2(\mathbb{N})$ . En outre pour  $x, h \in l^2(\mathbb{N})$

$$g(x+h) - g(x) = (2x_n h_n)_n + (h_n^2)_n := L(h) + \frac{1}{2}Q(h, h).$$

L'inégalité immédiate  $|x_n| \leq \|x\|_2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  implique que

$$\|L(h)\|_2 \leq \|x\|_2 \|h\|_2, \quad \|Q(h, h)\|_2 \leq \|h\|_2^2,$$

ces inégalités assurent que  $L$  (resp.  $Q$ ) est une application linéaire (resp. bilinéaire) **continue** de  $l^2(\mathbb{N})$  (resp.  $l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$ ) dans  $l^2(\mathbb{N})$  :  $g$  est donc  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $l^2(\mathbb{N})$  et

$$Dg(x)(h) = L(h), \quad D^2g(x)(h, h) = Q(h, h) \quad D^k g(x)(h^k) \equiv 0, \forall k \geq 3.$$

3. et

4. Il faut commencer par noter que la série définissant  $f$  est certainement convergente pour tout  $x \in l^2(\mathbb{N})$ . Alors

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} x_n^2 \left( \frac{1}{n} - x_n \right) = \langle g(x), \omega - x \rangle, \quad \text{où } \omega = (n^{-1})_n \in l^2(\mathbb{N}).$$

Le produit scalaire dans  $l^2(\mathbb{N})$  est une application bilinéaire continue (Cauchy-Schwarz) donc  $\mathcal{C}^\infty$  ;  $g$  étant aussi  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $l^2(\mathbb{N})$ ,  $f$  le sera par composition.

5. Par composition

$$Df(x)(h) = \langle dg(x)(h), \omega - x \rangle - \langle g(x), h \rangle = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n, \quad x, h \in l^2(\mathbb{N}).$$

En particulier

$$Df(0_{l^2(\mathbb{N})}) = 0, \quad \forall h \in l^2(\mathbb{N}),$$

et l'origine  $0_{l^2(\mathbb{N})}$  de  $l^2(\mathbb{N})$  est bien un point critique de  $f$ .

6. Pour calculer  $D^2 f(x)(h, h)$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(x_n + h_n)^2}{n} - (x_n + h_n)^3 \right) - \sum_{n \geq 1} \left( \frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + \sum_{n \geq 1} h_n^3 \\ &= Df(x)(h) + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + o(\|h\|_{l^2(\mathbb{N})}^2) \end{aligned}$$

par unicité, la partie quadratique est  $D^2 f(x)(h, h)$ , soit

$$D^2 f(x)(h, h) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2, \quad \forall x, h \in l^2(\mathbb{N}),$$

en particulier

$$D^2 f(0_{l^2(\mathbb{N})})(h, h) = \sum_{n \geq 1} \frac{h_n^2}{n} > 0, \quad \forall h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}.$$

7. On a

$$f(x_\varepsilon) = \frac{x_{n_0}^2}{n_0} - x_{n_0}^3 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \left(n_0^{-1} - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0$$

vu le choix de  $n_0$ . Et comme

$$\|x_\varepsilon\| = |x_{n_0}| = \frac{\varepsilon}{2}$$

on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in l^2(\mathbb{N}) \text{ tel que } \|x_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \text{ et } f(x_\varepsilon) < 0 = f(0),$$

l'origine n'est donc pas un minimum local.

**Remarques :** -Pour calculer la différentielle de  $f$  il est bien entendu plus raisonnable d'utiliser les théorèmes de composition :

$$f(x) = \langle g(x), h(x) \rangle = b \circ \psi(x) \quad \text{où} \quad b(x, y) = \langle x, y \rangle, \quad \psi(x) = (g(x), l(x)),$$

de sorte que par bilinéarité de  $b$

$$Df(x)(h) = Db(g(x), l(x))(Dg(x)(h), Dl(x)(h)) = b(Dg(x)(h), l(x)) + b(g(x), Dl(x)(h))$$

- En le point critique  $x = 0_{l^2}$  les conditions nécessaires

$$Df(0) = 0 \quad \text{et} \quad D^2f(0)(h, h) \geq 0, \quad \forall h \in l^2(\mathbb{N})$$

(et même ici  $D^2f(0)(h, h) > 0, \quad \forall h \neq 0$ ) pour présenter un minimum local ne sont donc pas suffisantes au contraire de ce qui se passe en **dimension finie**. La première question donne une condition suffisante : il faut la positivité de  $D^2f$  localement au voisinage du point critique. Une condition portant uniquement sur le point critique est par exemple

$$\exists \alpha > 0 \quad : \quad D^2f(0)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2, \quad \forall h.$$

## Références

- [1] D. Azé., G. Constans, and J.B. Hiriart-Urruty. Exercices de Calcul Différentiel. Dunod, 2004.