Extrémas et convexité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Extrémas et convexité***

([1], sujet 8.)

① ***(préliminaire)*** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé E. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)(u,u) \geq 0$ pour tout x dans un vosinage V de a et pour tout $u \in E$. Montrer que f présente un minimum local au point a.*

Dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ des suites de réels de carré intégrable on pose pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$:

$$g(x) = (x_n^2)_{n\geq 1}, \quad f(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3\right).$$

② *Montrer que $g \in \mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), l^2(\mathbb{N}))$ et préciser $dg(x)(h),\ \forall\, x, h \in l^2(\mathbb{N})$*

③ *Exprimer $f(x)$ en fonction de g et du produit scalaire.*

④ *Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), \mathbb{R})$.*

⑤ *Préciser $Df(x),\ \forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$ et vérifier que la suite nulle 0_{l^2} est un point critique de f.*

⑥ *Calculer $D^2f(x),\ \forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$ et vérifier que*

$$\forall h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2}\} \ : \ D^2f(0_{l^2})(h,h) > 0.$$

⑦ *Soit $\varepsilon > 0$ et $x_\varepsilon = (x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = 0\ \forall\, n \neq n_0 := E(2/\varepsilon) + 1$ et $x_{n_0} = \varepsilon/2$. Montrer que $f(x_\varepsilon) < 0$. Calculer $\|x_\varepsilon\|_2$ et en déduire que l'origine 0_{l^2} n'est pas un minimum local de f. Commentaire ?*

Solution :

1. *Soit $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset V$. La formule de Taylor avec reste intégral ([?], théorème 6.3 page 279) assure que pour tout $h \in E$ vérifiant $[a, a+h] \subset U$*

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) = f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} D^2f(a+th)(h,h)dt$$

Alors $\|h\| < \delta$ implique $[a, a+h] \subset V$, et l'hypothèse sur D^2f assure la positivité du terme de droite dans la formule de Taylor. Soit

$$f(b) \geq f(a), \quad \forall\, b \in B(a,\delta),$$

le point a est bien un minimum local de f.

2. *Il est clair que* $g(x) \in l^2(\mathbb{N})$ *pour tout* $x \in l^2(\mathbb{N})$. *En outre pour* $x, h \in l^2(\mathbb{N})$

$$g(x+h) - g(x) = (2x_n h_n)_n + (h_n^2)_n := L(h) + \frac{1}{2} Q(h,h).$$

L'inégalité immédiate $|x_n| \leq \|x\|_2,\ n \in \mathbb{N}$ *implique que*

$$\|L(h)\|_2 \leq \|x\|_2 \|h\|_2, \quad \|Q(h,h)\|_2 \leq \|h\|_2^2,$$

ces inégalités assurent que L *(resp.* Q*) est une application linéaire (resp. bilinéaire)* ***continue*** *de* $l^2(\mathbb{N})$ *(resp.* $l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$*) dans* $l^2(\mathbb{N})$ *:* g *est donc* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $l^2(\mathbb{N})$ *et*

$$Dg(x)(h) = L(h), \quad D^2 g(x)(h,h) = Q(h,h) \quad D^k g(x)(h^k) \equiv 0, \forall k \geq 3.$$

3. *et*
4. *Il faut commencer par noter que la série définissant* f *est certainement convergente pour tout* $x \in l^2(\mathbb{N})$. *Alors*

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} x_n^2 \left(\frac{1}{n} - x_n \right) = \langle g(x), \omega - x \rangle, \quad \text{où} \quad \omega = (n^{-1})_n \in l^2(\mathbb{N}).$$

Le produit scalaire dans $l^2(\mathbb{N})$ *est une application bilinaire continue (Cauchy-Schwarz) donc* $\mathscr{C}^\infty$ *;* g *étant aussi* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $l^2(\mathbb{N})$, f *le sera par composition.*

5. *Par composition*

$$Df(x)(h) = \langle dg(x)(h), x - \omega \rangle - \langle g(x), h \rangle = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n, \quad x, h \in l^2(\mathbb{N}).$$

En particulier

$$Df(0_{l^2(\mathbb{N})}) = 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N}),$$

et l'origine $0_{l^2(\mathbb{N})}$ *de* $l^2(\mathbb{N})$ *est bien un point critique de* f.

6. *Pour calculer* $D^2 f(x)(h,h)$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(x_n + h_n)^2}{n} - (x_n + h_n)^3 \right) - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2x_n}{n} - 3x_n^2 \right) h_n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + \sum_{n \geq 1} h_n^3 \\ &= Df(x)(h) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2 + o(\|h\|_{l^2(\mathbb{N})}^2) \end{aligned}$$

par unicité, la partie quadratique est $D^2 f(x)(h,h)$, *soit*

$$D^2 f(x)(h,h) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - 3x_n \right) h_n^2, \quad \forall\, x, h \in l^2(\mathbb{N}),$$

en particulier

$$D^2 f(0_{l^2(\mathbb{N})})(h,h) = \sum_{n \geq 1} \frac{h_n^2}{n} > 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}.$$

7. *On a*

$$f(x_\varepsilon) = \frac{x_{n_0}^2}{n_0} - x_{n_0}^3 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 (n_0^{-1} - \frac{\varepsilon}{2}) < 0$$

vu le choix de n_0*. Et comme*

$$\|x_\varepsilon\| = |x_{n_0}| = \frac{\varepsilon}{2}$$

on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in l^2(\mathbb{N}) \text{ tel que } \quad \|x_\varepsilon\|_2 < \varepsilon \quad \text{et} \quad f(x_\varepsilon) < 0 = f(0),$$

l'origine n'est donc pas un minimum local.

Remarques : *-Pour calculer la différentielle de* f *il est bien entendu plus raisonnable d'utiliser les théorèmes de composition :*

$$f(x) = \langle g(x), h(x)\rangle = b \circ \psi(x) \quad \text{où} \quad b(x,y) = \langle x, y\rangle, \ \psi(x) = (g(x), l(x)),$$

de sorte que par bilinéarité de b

$$Df(x)(h) = Db(g(x), l(x))(Dg(x)(h), Dl(x)(h)) = b(Dg(x)(h), l(x)) + b(g(x), Dl(x)(h))$$

\- *En le point critique* $x = 0_{l^2}$ *les conditions nécessaires*

$$Df(0) = 0 \quad \text{et} \quad D^2 f(0)(h,h) \geq 0, \quad \forall\, h \in l^2(\mathbb{N})$$

(et même ici $D^2 f(0)(h,h) > 0, \quad \forall\, h \neq 0$*) pour présenter un minimum local ne sont donc pas suffisantes au contraire de ce qui se passe en* ***dimension finie****. La première question donne une condition suffisante : il faut la positivité de* $D^2 f$ *localement au voisinage du point critique. Une condition portant uniquement sur le point critique est par exemple*

$$\exists\, \alpha > 0 \quad : \quad D^2 f(0)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2, \quad \forall h.$$

Références

[1] D. Azé., G. Constans, and J.B. Hiriart-Urruty. Exercices de Calcul Différentiel. Dunod, 2004.