Extrémas et convexité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

8 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Extrémas et convexité***

([1], sujet 8.)

① ***(préliminaire)*** *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur un ouvert* U *d'un espace vectoriel normé* E. *Soit* $a \in U$ *tel que* $Df(a) = 0$ *et* $D^2f(a)(u,u) \geq 0$ *pour tout* x *dans un vosinage* V *de* a *et pour tout* $u \in E$. *Montrer que* f *présente un minimum local au point* a.

Dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ *des suites de réels de carré intégrable on pose pour* $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$ *:*

$$g(x) = (x_n^2)_{n\geq 1}, \quad f(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x_n^2}{n} - x_n^3 \right).$$

② *Montrer que* $g \in \mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), l^2(\mathbb{N}))$ *et préciser* $dg(x)(h),\ \forall\, x, h \in l^2(\mathbb{N})$

③ *Exprimer* $f(x)$ *en fonction de* g *et du produit scalaire.*

④ *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(l^2(\mathbb{N}), \mathbb{R})$.

⑤ *Préciser* $Df(x),\ \forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$ *et vérifier que la suite nulle* 0_{l^2} *est un point critique de* f.

⑥ *Calculer* $D^2f(x),\ \forall\, x \in l^2(\mathbb{N})$ *et vérifier que*

$$\forall h \in l^2(\mathbb{N}) \setminus \{0_{l^2}\} \ : \ D^2f(0_{l^2})(h,h) > 0.$$

⑦ *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $x_\varepsilon = (x_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $x_n = 0\ \forall\, n \neq n_0 := E(2/\varepsilon) + 1$ *et* $x_{n_0} = \varepsilon/2$. *Montrer que* $f(x_\varepsilon) < 0$. *Calculer* $\|x_\varepsilon\|_2$ *et en déduire que l'origine* 0_{l^2} *n'est pas un minimum local de* f. *Commentaire ?*

Références

[1] D. Azé., G. Constans, and J.B. Hiriart-Urruty. Exercices de Calcul Différentiel. Dunod, 2004.