Matrices et calcul différentiel

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Matrices et calcul différentiel

[1]

Calculer la différentielle de l'application $\varphi : A \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) = A^2 \in M_d(\mathbb{C})$. Même question avec $\psi : A \mapsto {}^tA \cdot A$.

Solution : Toutes ces applications sont bien sûr différentiables. On a pour A et H dans $M_d(\mathbb{C})$

$$\varphi(A + H) - \varphi(A) = AH + HA + H^2 = L(H) + o(\|H\|)$$

$$\psi(A + H) - \psi(A) = {}^tAH + {}^tHA + {}^tHH = L'(H) + o(\|H\|)$$

vu que $L, L' \in \mathcal{L}(M_d(\mathbb{C}))$ par définition de l'application différentielle

$$L = d\varphi(A) \quad \& \quad d\psi(A) = L'.$$

Remarque : on peut aussi retrouver la différentielle de ψ en considérant les applications

$$B : (X, Y) \in M_d(\mathbb{C})^2 \mapsto B(X, Y) = {}^tXY \in M_d(\mathbb{C})$$

$$\omega : X \in M_d(\mathbb{C}) \mapsto \omega(X) = (X, X) \in M_d(\mathbb{C})^2$$

en effet, B étant bilinéaire on a :

$$dB(X, Y)(H, K) = B(X, K) + B(H, Y)$$

de même, ω étant linéaire $d\omega(X) = \omega$. Enfin $\psi = B \circ \omega$ et finalement par composition

$$d\psi(A)(H) = dB(\omega(A)) \circ d\omega(A)(H) = dB(A, A)(\omega(H)) = dB(A, A)(H, H) = {}^tAH + {}^tHA$$

Références

[1] Francois Rouvière. Petit guide de Calcul Différentiel. Cassini, 1999.