

# Inversion locale et globale

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

## Exercice 0.1 ★ Inversion locale et globale

Il s'agit de quelques exemples et contre-exemples canoniques autour du théorème d'inversion globale que l'on trouve dans l'excellent ouvrage de F.Rouvière, [1].

1. Soit  $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de  $\Omega$  mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Expliciter des ouverts  $U, V$  aussi grands que possible et tels que  $f : U \rightarrow V$  soit un difféomorphisme global.

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , que  $f'(0) \neq 0$  mais que  $f$  n'est inversible sur aucun voisinage de l'origine. Commentaire ?

## Références

[1] Francois Rouvière. Petit guide de Calcul Différentiel. Cassini, 1999.