Théorème de d'Alembert-Gauss, calcul différentiel, optimisation

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Théorème de d'Alembert-Gauss, calcul différentiel, optimisation***

① *Si* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ *est continue et vérifie* $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$, *alors il existe* $z^\star \in \mathbb{C}$ *tel que* $f(z^\star) = \inf_{z\in\mathbb{C}} f(z)$.

② *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application* $n \geq 2$ *fois dérivable telle que*

▷ φ *présente en* 0 *un minimum.*

▷ *Il existe* $p \in \{2, \dots, n\}$ *tel que* $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$.

Alors, si k *désigne le premier entier* ≥ 2 (2 *car* $\varphi'(0) = 0$) *pour lequel* $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$, *on a nécessairement* $\varphi^{(k)}(0) \geq 0$.

③ *En déduire une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss.*

Solution :

1. *et*
2. *sont classiques.*

3. *Soit* $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ *un polynôme de degré* $d \geq 1$. *On pose* $f(z) = |P(z)|^2$ *(comme le dit JBHU, le carré est important pour lisser les choses... le module au carré ou norme euclidienne, à le bon gout d'être différentiable). On a*

$$f(z) = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| \geq \left(|a_d|.|z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|.|z|^k\right)^2$$
$$\geq |a_d|.|z|^{2d}\left(1 + 0\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \to +\infty \text{ quand } |z| \to +\infty.$$

Vu (1), il existe $z^\star \in \mathbb{C}$ *minimisant* f *sur* $\mathbb{C}$. *Il s'agit maintenant de montrer que* $z^\star$ *fait notre affaire, à savoir* $P(z^\star) = 0$. *Pour cela, on commence par se ramener à l'origine en considérant*

$$Q(z) := P(z + z^\star) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_d z^d = b_0 + \cdots + b_s t^s + \cdots + b_d t^d$$

(s est le premier entier non nul pour lequel $b_1 = \cdots = b_{s-1} = 0,\ b_s \neq 0$) et l'objectif est de démontrer que 0 est racine de Q, c'est à dire $b_0 = 0$. Pour cela, si $\theta \in [0, 2\pi[$, considérons

$$\varphi_\theta \ : \ t \in \mathbb{R} \ \mapsto \ \varphi_\theta(t) := \left| Q(te^{i\theta}) \right|^2,$$

*ce n'est rien d'autre que « la restriction » de f à la droite passant par l'origine des complexes d'argument θ. Bien entendu, φ_θ présente en $z = 0$ un minimum et ce, **quel que soit** $\theta \in [0, 2\pi[$ (en particulier $\varphi'_\theta(0) = b_1 e^{i\theta} = 0 \Longrightarrow b_1 = 0$). En outre*

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(t) &= \left(b_0 + b_s t^s e^{is\theta} + \cdots + b_d t^d e^{id\theta}\right)\left(\overline{b_0} + \overline{b_s} t^s e^{-is\theta} + \cdots + \overline{b_d} t^d e^{-id\theta}\right)\\ &= |b_0|^2 + \left(b_s \overline{b_0} e^{is\theta} + b_0 \overline{b_s} e^{-is\theta}\right) t^s + \text{ des termes en } t^k \text{ avec } k > 2s\\ &= |b_0|^2 + 2t^s \mathrm{re}\left(\overline{b_0} b_s e^{is\theta}\right) + 0(t^s).\end{aligned}$$

Par suite

$$\varphi_\theta^{(k)}(0) = 0, \text{ si } k = 1 \ldots s-1 \quad \text{et} \quad \varphi_\theta^{(s)}(0) = 2s!\mathrm{re}\left(\overline{b_0} b_s e^{is\theta}\right)$$

et vu (2), (bien remarquer que s est indépendant de θ et ≥ 2) :

$$\forall\, \theta \in [0, 2\pi[\quad : \quad \varphi_\theta^{(s)}(0) \geq 0.(\star)$$

Supposons $b_0 \neq 0$ (b_s est différent de zéro par construction), avec $\overline{b_0} b_s = |\overline{b_0} b_s| e^{i\rho}$ nous avons

$$\begin{aligned}2\mathrm{re}\left(\overline{b_0} b_s e^{is\theta}\right) &= 2\mathrm{re}(|\overline{b_0} b_s| e^{i\rho} e^{is\theta})\\ &= 2\left|\overline{b_0} b_s\right| \cos(s\theta + \rho)\end{aligned}$$

puisque $\left|\overline{b_0} b_s\right| > 0$ le dernier terme va décrire l'intervalle $]-\left|\overline{b_0} b_s\right|, \left|\overline{b_0} b_s\right|[$ lorsque θ varie de 0 à 2π si bien qu'il ne peut éviter de prendre des valeurs < 0 contredisant $(\star)$: la seule alternative est donc que $b_0 = 0$ et le théorème est démontré.

Remarque : *Cette démonstration nous a été communiquée par notre collègue de l'université Paul Sabatier de Toulouse, J.B. HIRIART-URRUTY, qui lui-même la tient du livre de ALEXEEV-TIKHOMIROV-FOMINE , « COMMANDE OPTIMALE » , EDITIONS MIR (1982).*

Références