Théorème de d'Alembert-Gauss, topologie, calcul différentiel

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Théorème de d'Alembert-Gauss, topologie, calcul différentiel***

① *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *vérifiant :*

▷ $\{ a \in \mathbb{R}^n : df(a) \notin GL_n(\mathbb{R}) \}$ *est fini.*

▷ *L'image réciproque par* f *de tout compact* K *de* $\mathbb{R}^n$ *est compacte.*

Alors f *est surjective si* $n \geq 2$.

② *En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.*

Solution :

1. *Supposons* $n \geq 2$ *et notons*

$$A = \{a \in \mathbb{R}^n : df(a) \notin GL_n(\mathbb{R}^n)\}, \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^n \setminus f(A) \quad \text{et} \quad \Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2).$$

- *Par hypothése* A *est fini, donc* $f(A)$ *aussi et par suite* Ω_2 *est ouvert ;* f *étant continue, il en est de même pour* Ω_1

On vérifie facilement que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus f(A)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ si bien que l'on peut encore considérer la restriction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ que l'on notera toujours f.

- *Avec la seconde hypothèse, l'image réciproque* $f^{-1}(K)$ *de tout compact* K *dans* Ω_2 *est (*Ω_2 *est ouvert, donc* K *est aussi un compact de* $\mathbb{R}^n$*) un compact de* Ω_1 *; par un résultat standart*[1] f *est fermée (ie l'image de tout fermé de* Ω_1 *est un fermé de* Ω_2*) : en particulier* $f(\Omega_1)$ *est* ***fermé*** *dans* Ω_2.

Montrons que $f(\Omega_1)$ *est* ***ouvert*** *dans* Ω_2 *: soit donc* $y \in f(\Omega_1)$ *et* $x \in \Omega_1$ *tel que* $f(x) = y$. *Par construction,* $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, *étant en dimension finie c'est un homéomorphisme linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *; par le théorème d'inversion locale, il existe donc deux ouverts* U, V *de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $x \in U \subset \Omega_1$, $y \in V$ *tels que* f *induise un difféomorphisme de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* U *sur* V. *Donc* $V = f(U) \subset \Omega_2$ *et* $f(\Omega_1)$ *est ouvert.*

- Ω_2 *est* $\mathbb{R}^n$ *privé d'un nombre fini de points : il est*[2] *connexe par arcs et donc* ***connexe****. Ainsi,* $f(\Omega_1)$ *est à la fois ouvert, fermé et non vide dans* Ω_2 *connexe :* $f(\Omega_1) = \Omega_2$.

- *Il est maintenant temps de conclure : soit* $y \in \mathbb{R}^n$ *il y a alors deux alternatives*

▷ *ou bien* $y \in f(A)$,

▷ *ou bien* $y \in \Omega_2 = f(\Omega_1)$,

dans tous les cas, y *admet un antécédent :* f *est bien* ***surjective***.

remarque : *Si* $n = 1$, f *peut ne pas être surjective comme le montrer l'exemple de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$. *On a* $A = \{0\}$ *et (exercice classique)* $\left(\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty\right) \iff \left(\forall K \text{ compact },\ f^{-1}(K) \text{ est compact }\right)$ *; les deux hypothèses sont donc bien vérifiées mais* f *n'est pas surjective.*

2. *Observons comment le théorème de d'Alembert-Gauss en découle : associons à tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1*

$$P(z = x + iy) = Q(x, y) + iR(x, y) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{avec} \quad Q = \mathrm{re}(P) \ \text{ et } \ R = \mathrm{im}(P)$$

l'application

$$\varphi \quad : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \longmapsto \ \varphi(x, y) = (Q(x, y), R(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

on va montrer que φ *satisfait deux aux hypothèses de la première question, si bien quelle sera surjective et l'origine admettra un antécédent i.e.* $\exists\,(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\varphi(a, b) = 0$ *soit* $P(a + ib) = R(a, b) + iQ(a, b) = 0$ *;* P *admet donc au moins un zéro dans* $\mathbb{C}$ *et le théorème de d'Alembert-Gauss est donc démontré.*

- *Commencons par remarquer* $|\varphi(x, y)| = |P(z)|$ *et par conséquent*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} |\varphi(x, y)| = \lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$$

φ *étant continue sur* $\mathbb{R}^2$, *un exercice classique*[3] *nous assure que la seconde propriété est satisfaite par* φ.

- *Pour la première, la matrice jacobienne de* φ *est (avec les équations de Cauchy-Riemann* $\partial_x Q = \partial_y R,\ \partial_y Q = -\partial_x R$ *qui, rappelons-le sont faciles – i.e. ne nécessitent aucun recours à la* $\mathbb{C}$*-dérivabilité – à établir pour un polynôme) nous avons*

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x Q & \partial_y Q \\ \partial_x R & \partial_y R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x Q & -\partial_x R \\ \partial_x R & \partial_x Q \end{pmatrix}$$

soit[4]

$$|J_\varphi(x, y)| = |\partial_x Q(x, y)|^2 + |\partial_x R(x, y)|^2 = |P'(z)|^2,$$

si bien que

$$\{\, X \in \mathbb{R}^2 \ : \ d\varphi(X) \notin GL_2(\mathbb{R}) \,\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P'(a + ib) = 0\}$$

et finalement

$$\mathrm{card}\{\, X \in \mathbb{R}^2 \ : \ d\varphi(X) \notin GL_2(\mathbb{R}) \,\} = \mathrm{card}\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ P'(a+ib) = 0\} \leq \text{degré}(P) - 1 < +\infty$$

soit (1)

Références