Extrêmes en dimension plus grande que 2 : attention aux idées reçues !

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Extrêmes en dimension plus grande que 2 : attention aux idées reçues !

1. Considérons une application $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Si f admet un point critique qui est un un extrema local (maximum ou minimum local) mais non global, doit-elle posséder au moins un autre point critique ? (d'après J.M.Ash & H.Sexton « A surface with one local minimum », *Math.Mag.* (19??) 58-3, pp. 147-149 and I.Rosenholtz & L.Smylie « The only critical point in town », *Math.Mag.* (19??) 58-3, pp. 149-150).
2. Dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$, ($d \geq 1$) donner l'exemple d'un polynôme à coefficients réels minoré sur $\mathbb{R}^d$ sans atteindre sa borne inférieure.

Solution :

1. La réponse est oui si $d = 1$ et de manière à priori plus surprenante non si $d \geq 2$.

- Si $d = 1$. Soit donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ présentant (sans perdre de généralité...) à l'origine un minimum local. Par exemple $f(0) = 0$, $f(x) > 0$, $\forall 0 < |x| < \delta$. $x = 0$ n'étant pas un minimum global, il existe $a \in \mathbb{R}$, disons $a > 0$, tel que $f(a) < 0$. Soit $f(a)f(\delta/2) < 0$, par le théorème de valeurs intermédiaires il existe $b > 0$ tel que $f(b) = 0$, soit $f(0) = f(b) = 0$; le théorème de Rolle assure alors de l'existence d'un réel $c \in]0, b[$ tel que $f'(c) = 0$ et nous avons bien construit un second point critique pour f .

- Pour un contre-exemple en deux variables, considérons la fonction $\mathcal{C}^\infty$

$$f(x, y) = \frac{-1}{1+x^2} + (2y^2 - y^4) \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour localiser les points critiques et préciser leur nature sans trop de calculs considérons les sections du graphe de f à $x = c = \text{constante}$: l'application $f_c(y) = f(c, y) = -a + (2y^2 - y^4)(e^c + a)$ présente (voir figure 1) trois points critiques $y = 0$, $y = 1$ et $y = -1$. Ainsi, les éventuels points critiques de f se trouveront sur les sections $y = 0$, $y = 1$ et $y = -1$ (vu qu'ailleurs, $\partial_y f \neq 0$). Sur $y = \pm 1$, $f(x, \pm 1) = e^x$ soit $\partial_x f = e^x > 0$. Sur $y = 0$, $f(x, 0) = \frac{-1}{1+x^2}$ soit $\partial_x f(x, 0) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule si, et seulement si $x = 0$. f admet donc un unique point critique : $(0, 0)$.

25025

$f(0,0) = -1 > -17 = f(0,2)$: $(0,0)$ n'est donc pas un minimum global. Il nous reste à vérifier que $(0,0)$ est néanmoins un minimum local, pour cela il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -1 + \frac{x^2}{1+x^2} + y^2(2-y^2) \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= f(0,0) + \left[\frac{x^2}{1+x^2} + y^2(2-y^2) \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \right] \\ &> f(0,0) \quad \text{pour } (x,y) \in D((0,0), \sqrt{2}) \setminus \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Il suffit de considérer dans $\mathbb{R}[X, Y]$ le polynôme

$$p(x,y) = x^2 + (xy - 1)^2$$

qui est clairement positif sur $\mathbb{R}^2$; toutefois l'axe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ et l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ n'ayant aucun points communs notre polynôme ne prends jamais la valeur 0. Mais

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad p(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) = \varepsilon^2$$

si bien que

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} p(x,y) = 0$$

et ne sera jamais atteint.

Remarque : - Moralité : comme toujours se méfier du passage en plusieurs variables, nombreuses propriétés, vraies en une variable ne passent plus dès deux variables !

- Le second exemple est un petit garde-fou contre la tentation d'étendre à plusieurs variables la propriété classique en une variable (idem dans $\mathbb{C}[z]$)

$$\forall p \in \mathbb{R}[x], \deg(p) \geq 1 \quad : \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |p(x)| = +\infty$$

alors que le polynôme à deux variables considéré plus haut est constant sur l'axe des ordonnées.

Références