Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer qu'il existe une et une seule sphère, dont on déterminera le rayon et le centre, intersectant les plans $x = 1$ et $z = -1$ suivant les cercles d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2y + z^2 + 6z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} z = -1 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \quad .$$

Solution : *On a :*

$$y^2 - 2y + z^2 + 6z + 2 = (y-1)^2 + (z+3)^2 - 8 \quad \text{et} \quad x^2 - 4x + y^2 - 2y = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 5$$

donc $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre $\Omega_1\,(1, 1, -3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$, $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $\Omega_2\,(2, 1, -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Le centre Ω de la sphère $\mathcal{S}$ se trouve à l'intersection de la droite perpendiculaire au plan $x = 1$ et passant par Ω_1 et de la droite perpendiculaire au plan $z = -1$ et passant par Ω_2, donc $\Omega\,(2, 1, -3)$. Calculons maintenant son rayon. Le point $A\,(0, 0, -1)$ est élément de $\mathcal{C}_2$ et donc de $\mathcal{S}$. Calculons $\left\|\overrightarrow{A\Omega}\right\| = \sqrt{9} = 3$ et le rayon de $\mathcal{S}$ est 3.

Références