Calcul différentiel, espaces vectoriels normés, polynômes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul différentiel, espaces vectoriels normés, polynômes***

([1], 2000/01, EX. 52).

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme uniforme sur $[0,1]$ et on considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(P) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{1+k^2P^2(k^{-1})}$$

① *Préciser le domaine de définition de f et vérifier que c'est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.*

② *Montrer que f est différentiable sur cet ouvert.*

Solution : ***Rappel :*** Soient E, F deux espaces vectoriels normés, une application $f : E \to F$ est différentiable au point $a \in E$ s'il existe une application linéaire **continue** $L = df(a) : E \to F$ verifiant

$$\lim_{h\to 0_E} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

1. *Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $u_k(P) = \dfrac{1}{1+k^2P(k^{-1})^2}$.*

   - *Si $P(0) \neq 0$, alors*

   $$u_k(P) = \frac{1}{1+k^2(P(0)+0(k^{-1}))^2} = \frac{1}{1+P^2(0)k^2(1+0(k^{-1})} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{P(0)^2k^2} \quad (k \to +\infty)$$

   Avec le critère de comparaison des séries à termes positifs, $f(P)$ est bien définie.

   - *Supposons maintenant que $P(0) = 0$. $P \equiv 0$ la série $\sum_k u_k(P)$ diverge grossièrement ; sinon soit $d := \inf\{\nu \ : \ P^{(\nu)}(0) \neq 0\}$ la valuation de P. La formule de Taylor assure que*

   $$P(k^{-1}) = \frac{P^{(d)}(0)}{d!}\frac{1}{k^d} + o(k^{-d}) \quad (k \to \infty)$$

   ainsi, lorsque k tends vers $+\infty$

   $$u_k(P) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{P^{(d)}(0)}{d!}\right)^2 \dfrac{1}{k^{2(d-1)}} + o\left(\dfrac{1}{k^{2(d-1)}}\right)} \longrightarrow \begin{cases} \left(1+P'(0)^2\right)^{-1}, & \text{si } d = 1, \\ 1, & \text{si } d > 1. \end{cases}$$

Et la série $\sum_k u_k(P)$ diverge grossièrement.

- *En résumé, le domaine de définition de f est*

$$\mathscr{D}_f = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ P(O) \neq 0\}.$$

C'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par l'application linéaire $\varphi \ : \ \mathbb{R}[X] \ni P \mapsto \varphi(P) = P(0)$. Puisque

$$|\varphi(P)| = |P(0)| \leq \|P\| := \sup_{[0,1]} |P(t)|,$$

φ est continue et $\mathscr{D}_f = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est ouvert dans $\mathbb{R}[X]$.

2. *Soit $P \in \mathscr{D}_f$ et étudions la différentiabilité de f au point P. Soit $H \in \mathscr{D}_f$ de norme suffisament petite pour que $P + H \in \mathscr{D}_f$. Il s'agit de trouver une application $L \in \mathscr{L}_c(\mathscr{D}_f, \mathbb{R})$ telle que*

$$f(P+H) - f(P) = L(H) + o(\|H\|_\infty),$$

deviner L n'est pas immédiat, un petit **interlude divinatoire** *est nécéssaire :*

- *on est donc conduit à étudier la quantité*

$$\begin{aligned}
u_k(P+H) - u_k(P) &= \frac{1}{1 + k^2(P+H)^2(k^{-1})} - \frac{1}{1 + k^2P^2(k^{-1})} \\
&= -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1}) + k^2H^2(k^{-1})}{(1 + k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1 + k^2P^2(k^{-1}))} \\
&= -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1}) + k^2H^2(k^{-1})}{(1 + k^2P^2(k^{-1})^2)} \\
&\quad + \frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2P^2(k^{-1}))} - \frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1 + k^2P^2(k^{-1}))} \\
&= L_k(H) + R \quad \text{avec} \quad L_k(H) = -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2P^2(k^{-1}))^2} = -2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P)
\end{aligned}$$

notre choix pour $L_k(H)$ purement subjectif peut être motivé par exemple parce qu'il faut d'une part chercher quelque chose de linéaire en H et, d'autre part si $\|H\|$ tends vers zéro

$$-\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2(P+H)^2(k^{-1}))(1 + k^2P^2(k^{-1}))} \underset{\|H\| \to 0}{\sim} -\frac{2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2P^2(k^{-1})^2)} = L_k(H).$$

On peut aussi motiver notre choix en utilisant sans aucune rigueur la formule classique mais toujours d'une importance stratégique :

$$(f \text{ différentiable en } a) \Longrightarrow \left(df(a)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \right).$$

En effet, pour le cas qui nous interesse

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{f(P+tH) - f(P)}{t} &= \lim_{t \to 0} \sum_{k \geq 1} \frac{u_k(P+tH) - u_k(P)}{t} \\
&= \sum_{k \geq 1} \lim_{t \to 0} \frac{u_k(P+tH) - u_k(P)}{t} \\
&= \sum_{k \geq 1} -2k^2P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P) = \sum_{k \geq 1} L_k(H) = L(H)
\end{aligned}$$

où bien entendu l'échange $\lim \sum = \sum \lim$ *n'a pas été justifié. Résumons nous : nous avons un candidat suspect pour* $df(P)(H)$ *c'est*

$$L_P(H) = \sum_{k \geq 1} -2k^2 P(k^{-1}) H(k^{-1}) u_k^2(P) (\bigstar)$$

pour montrer que c'est bien lui (i.e. $L_P = df(P)$*), il va falloir successivement montrer que la série définissant* L_P *est bien convergente sur* $\mathscr{D}_f$*, qu'alors* L_P *est une application (linéaire)* ***continue*** *de* $\mathscr{D}_f$ *dans* $\mathbb{R}$ *et qu'enfin* $f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$ *(ou justifier*

l'échange $\lim \sum = \sum \lim$ *dans ce qui précède...). Au travail.*

- *Soit* $P \in \mathscr{D}_f$*, nous avons comme dans la première partie*

$$k^2 u_k^2(P) \sim \frac{1}{k^2 P^4(0)}$$

de sorte que la série $\sum_{k\geq 1} k^2 u_k^2(P)$ *converge. Notons* $C = \sum_{k\geq 1} k^2 u_k^2(P)$*, pour tout* $H \in \mathscr{D}_f$ *nous avons*

$$|2k^2 P(k^{-1}) u_k^2(P) H(k^{-1})| \leq 2\|P\|_\infty \|H\|_\infty k^2 u_k^2(P), \quad k \in \mathbb{N}^\star$$

ce qui, par critère de comparaison des séries à termes positifs assure que la série définissant L_P *est bien absolument convergente sur* $\mathscr{D}_f$*. En outre il résulte aussi de cette inégalité :*

$$\forall\, H \in \mathscr{D}_f \quad : \quad |L_P(H)| \leq 2C\|P\|_\infty \|H\|_\infty$$

qui assure la continuité de L_P *sur* $\mathscr{D}_f$ *(la linéarité est évidente).*
- *Montrons maintenant que* $f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$*. C'est un calcul assez fastidieux.*

$$f(P+H) - f(P) - L_P(H) = \sum_{k\geq 1} u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2 P(k^{-1}) u_k^2(P) H(k^{-1}).$$

et pour $k \in \mathbb{N}^\star$

$$u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2 P(k^{-1}) u_k^2(P) H(k^{-1}) = \left(-1 + 3k^2 P^2(k^{-1}) + 2k^2 P(k^{-1}) H(k^{-1})\right) k^2 H(k^{-1}) u_k^2(P) u_k(P+H)$$

donc

$$|u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2 P(k^{-1}) u_k^2(P) H(k^{-1})| \leq k^2 u_k^2(P) u_k(P+H) \left(1 + k^2(3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty \|H\|_\infty)\right)$$

et comme $0 < u_k(P+H) \leq 1$

$$|u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2 P(k^{-1}) u_k^2(P) H(k^{-1})| \leq k^2 u_k^2(P) \left(1 + k^2 u_k(P+H)(3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty \|H\|_\infty)\right).$$

Mais

$$\frac{1}{k^2 u_k(P+H)} = \frac{1 + k^2(P(k^{-1}) + H(k^{-1}))^2}{k^2} \geq (P(k^{-1}) + H(k^{-1}))^2 \geq (|P(k^{-1})| - |H(k^{-1})|)^2 (\star)$$

et par continuité de P *à l'origine, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $k \geq N$ *implique* $|P(k^{-1})| \geq \dfrac{|P(0)|}{2}$ *et comme* H *peut être choisi de norme arbitrairement petite, imposont* $\|H\|_\infty \leq \dfrac{|P(0)}{4}$*. Alors pour* $k \geq N+1$

$$|P(k^{-1}) - H(k^{-1}))| \geq \frac{|P(0)}{2} - \|H\|_\infty \geq \frac{|P(0)|}{4}$$

soit, avec $(\star)$ *:*

$$k^2 u_k(P+H) \leq \frac{16}{|P(0)|^2}$$

par conséquent, $(C = \sum_{k\geq 1} k^2 u_k^2(P))$

$$|f(P+H) - f(P) - L_P(H)| \leq \sum_{k\geq 1} |u_k(P+H) - u_k(P) + 2k^2 P(k^{-1})H(k^{-1})u_k^2(P)|$$

$$\leq \|H\|_\infty^2 \left\{ C + (3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty \|H\|_\infty) \left(\sum_{k=1}^{N} k^4 u_k^2(P) u_k(P+H) + \sum_{k\geq N+1} k^4 u_k^2(P) u_k(P+H) \right) \right\}$$

$$\leq \|H\|_\infty^2 \left\{ C + (3\|P\|_\infty^2 + 2\|P\|_\infty \|H\|_\infty) \left(\sum_{k=1}^{N} k^4 u_k^2(P) u_k(P+H) + \frac{16}{|P(0)|^2} C \right) \right\}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|_\infty)$$

lorsque H *tends vers* 0 *dans* $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$ *:* f *est donc différentiable au point* P *et la différentielle de* f *au point* P *est la forme linéaire continue* $df(P) = L_P$ *:*

$$H \mapsto -\sum_{k\geq 1} \frac{2k^2 P(k^{-1})H(k^{-1})}{(1 + k^2 P^2(k^{-1}))^2}.$$

Remarques : *- Ouf ! et si quelqu'un a plus simple : qu'il se manifeste !*

- En dimension infinie, il ne faut sutout pas oublier l'hypothèse de continuité pour l'application linéaire dans la définition de la différentiabilité sans laquelle par exemple toute application linéaire discontinue (il en existe toujours en dimension infinie...c'est un autre exercice) serait automatiquement différentiable ! Certains auteurs imposent plutot à f *d'être continue au point* a *dans la définition de la différentiabilité, l'application linéaire est alors automatiquement continue.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.