Calcul différentiel, extréma, fonctions harmoniques

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul différentiel, extréma, fonctions harmoniques***

[1],1994/95, EX. 247.

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit f une application de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\overline{\Omega}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et enfin harmonique sur Ω. Montrer que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \sup_{x\in\partial\Omega} f(x).$$

Solution : *Ω est borné, donc $\overline{\Omega}$ est compact : f continue, atteint donc son suprémum en au moint un point α. Supposons par l'absurde que*

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f(x) = f(\beta) < f(\alpha)$$

(car la frontière $\partial\Omega$ est fermée bornée donc aussi compacte) et posons pour

$$x = {}^t(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi(x) = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^d x_i^2.$$

Clairement

$$\Delta\varphi(x) = 2d.$$

considérons maintenant pour $\varepsilon > 0$, la fonction définie sur $\overline{\Omega}$ par

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\varphi(x).$$

la quantité

$$M = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x)$$

est bien finie par continuité de φ sur le compact $\overline{\Omega}$. Si bien que

$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) \leq f(\beta) + \varepsilon.M$$

et
$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x) \geq f(\alpha).$$
Puisque $f(\alpha) > f(\beta)$, *on peut choisir* $\varepsilon > 0$ *assez petit pour que* $f(\beta) + \varepsilon.M < f(\alpha)$; *les deux dernières inégalités nous donnent alors*
$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) \leq f(\beta) + \varepsilon.M < f(\alpha) \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x)$$
soit
$$\sup_{x\in\partial\Omega} f_\varepsilon(x) < \sup_{x\in\overline{\Omega}} f_\varepsilon(x).$$
En d'autres termes pour un tel ε, *le suprémum de* f_ε *sur* $\overline{\Omega}$ *est atteint en un point* γ *de* Ω. Ω *étant ouvert* γ *est un maximum local :*
$$d^2 f_\varepsilon(x)(h,h) = \sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \leq 0, \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^d.$$
En particulier le choix $h = h^i = (0,\dots,0,1,0\dots,0) \in \mathbb{R}^d$ *pour* $1 \leq i \leq d$ *implique :*
$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) \leq 0$$
en contradiction avec
$$\Delta f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \Delta f(x) + 2d\varepsilon = 2d\varepsilon > O.$$
Le résultat est démontré.

Remarque : *La preuve est à peine plus simple si* Ω *est une boule : soit pour* $\varepsilon > 0$,
$$g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x - a\|^2.$$
Nous avons
$$dg_\varepsilon(x) = df(x) + 2\varepsilon\langle x - a, \mathbf{1}\rangle \quad \text{et} \quad d^2 g_\varepsilon(x) = d^2 f(x) + 2\varepsilon I_d,$$
(où $\mathbf{1} = {}^t(1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$ *et* $I_d \in M_d(\mathbb{R}^d)$ *est la matrice identité). Comme par hypothèse*
$$\Delta(f) = tr(d^2 f) = 0$$
nous avons
$$tr(d^2 g_\varepsilon(x)) = \Delta(g_\varepsilon)(x) = 2d\varepsilon > 0$$
si bien que $d^2 g_\varepsilon(x)$ *admet toujours au moins une valeur propre strictement positive en chaque point de la boule ouverte* $B(a,r)$ *(*g_ε *harmonique est de classe* $\mathscr{C}^2$ *(en fait alors* $\mathscr{C}^\infty$*) sa matrice Hessienne est donc symétrique réelle et ses valeurs propres sont réelles...). Mais* f *et donc* g_ε *est continue sur le compact* $\overline{B(a,r)}$: g_ε *y admet donc un maximum* x_0 *qui, vu ce qui précède se trouvera nécessairement sur la frontière de* B. *En outre sur la frontière de la boule* $\varepsilon\|x-a\|^2 = \varepsilon r^2$, *cette quantité étant constante* x_0 *ne dépend pas de* ε *i.e.*
$$\exists\, x_0 \in \partial B \quad : \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ x \in B \qquad f(x) + \varepsilon\|x - a\|^2 \leq f(x_0) + \varepsilon\|x_0 - a\|^2,$$
il ne reste plus qu'à faire tendre ε *vers zéro pour conclure.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.