Preuve du théorème des moments de Hausdorff par les séries de Fourier

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Preuve du théorème des moments de Hausdorff par les séries de Fourier***

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi])$ *telle que*

$$\int_0^{2\pi} t^n f(t)dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{int} f(t)dt = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

et en déduire que $f \equiv 0$.

Solution : *Notons* $\widetilde{f}$ *la fonction* 2π*-périodique paire continue sur* $\mathbb{R}$ *qui coïncide avec* f *sur* $]0,2\pi]$ *; ses coefficients de fourier complexes sont donnés par*

$$c_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Mais par normale convergence sur $[0,2\pi]$ *de la série entière* $e^{int} = \sum_{k\geq 0} \frac{(int)^k}{k!}$ *on peut écrire*

$$c_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(int)^k}{k!}\right)dt = \sum_{k\geq 0}\frac{(in)^k}{2\pi(2k)!}\int_0^{2\pi} t^k f(t)dt = 0$$

vu les hypothèses sur f *: les coefficients de Fourier de l'application* $\widetilde{f}$ *continue sur* $[0,2\pi]$ *et* 2π*-périodique sont tous nuls, comme corollaire de la formule de Parseval*[1] *elle est donc identiquement nulle et par suite* f*. Modulo translation et homothétie le résultat en découle sur tout intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$*.*

Références