$\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)^2dy+\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)^2dx \leq (\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy)^2+\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

12 mai 2023

Exercice 0.1 ★ $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)^2dy+\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)^2dx \leq (\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy)^2+\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy$

Putnam (2005), [1] 2005/8.

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$, *montrer que*

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2dy+\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2dx \leq \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2+\int_0^1\int_0^1 f(x,y)^2dxdy.$$

Solution : *Considèrons pour* $m,n\in\mathbb{Z}$

$$\widehat{f}(n,m)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{-2i\pi(nx+my)}dxdy$$

les coefficients de Fourier de f. En particulier

$$\widehat{f}(0,0)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy.(1)$$

La fonction $x\mapsto\int_0^1 f(x,y)dy$ *est une fonction dont la série de Fourier est* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n,0)e^{-2i\pi nx}$. *De carré intégrable sur* $[0,1]$, *on peut lui appliquer la formule de Parseval*

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n,0)\right|^2.(2)$$

De même

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2dy=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(0,m)\right|^2.(3)$$

En appliquant Parseval dans $L^2([0,1]^2)$ *à* $(x,y) \mapsto f(x,y)$ *on a aussi*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)^2 dxdy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n,m)\right|^2 .(4)$$

Avec $(1),(2),(3)$ *et* (4) *on a*

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy\right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)^2 dxdy - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)^2 dy$$
$$- \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} \sum_{m\in\mathbb{Z}^\star} \left|\widehat{f}(n,m)\right|^2 \geq 0$$

Q.E.D.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.