Fonction 2π-périodique continue à coefficients de Fourier positifs

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

8 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Fonction 2π-périodique continue à coefficients de Fourier positifs***

[1], 115/4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π périodique et continue. On suppose tous ses coefficients de Fourier $(c_k(f),\ k \in \mathbb{Z})$ positifs ; montrer que f est développable en série de Fourier.

Pour cela

1. *Montrer que pour tout $0 < r < 1$*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} f(t)dt := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(t)dt$$
2. *En déduire que*
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} \leq \|f\|_\infty.$$
3. *En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge et conclure.*

Solution :

1. *Soit $0 < r < 1$*
$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}r^{|n|}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t)e^{-int}r^{|n|}dt \qquad \text{par NCV sur } [0,2\pi] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-int}r^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{int}r^n\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{1-re^{-it}} + \frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}dt\end{aligned}$$

2. *En considérant $f \equiv 1$ la formule précédente se resume à*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = c_0(f) = 1.$$

De là, pour $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(t)dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|P_r(t)dt \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = \|f\|_\infty.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ nous pouvons donc écrire

$$0 \leq \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)r^{|n|} \leq \|f\|_\infty, \qquad \forall\, r \in]0,1[,$$

soit, si r tends vers 1_-

$$0 \leq \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \leq \|f\|_\infty,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3. *Les coefficients de Fourier de f étant positifs, la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)$ en découle ; elle entraine la normale convergence sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f.*

   Il ne reste plus qu'à se souvenir que si la série de Fourier d'une application $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$ converge uniformément sur un intervale de longueur supérieure à 2π c'est nécessairement vers f (poser $g = \sum_{\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$, montrer que $c_k(f) = c_k(g)$, $\forall\, k$, et en déduire via Parseval de $f - g \equiv 0$).

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.