Fonction 2π-périodique continue à coefficients de Fourier positifs

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

25 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Fonction** 2π**-périodique continue à coefficients de Fourier positifs***

[1], 115/4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une application* 2π *périodique et continue. On suppose tous ses coefficients de Fourier* $(c_k(f),\ k \in \mathbb{Z})$ *positifs ; montrer que* f *est développable en série de Fourier.*

Pour cela

1. *Montrer que pour tout* $0 < r < 1$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} f(t)dt := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)f(t)dt$$

2. *En déduire que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1 \quad \textit{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} \leq \|f\|_\infty.$$

3. *En déduire que la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ *converge et conclure.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.