Séries de Fourier : histoires d'unicité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Séries de Fourier : histoires d'unicité***

[1],

Montrer que pour tout $a \neq 0$

$$e^{ax} = \begin{cases} \dfrac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\cos(nx)-n\sin(nx)}{a^2+n^2}\right), & 0<x<2\pi \\ \dfrac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n e^{a\pi}-1\}\dfrac{a\cos(nx)}{a^2+n^2}, & 0<x<\pi \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\dfrac{n\sin(nx)}{a^2+n^2}, & 0<x<\pi. \end{cases}$$

et préciser les sommes de ces trois séries à l'origine.

Solution : *La fonction f définie par $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et $f(0) = \frac{1+e^{2a\pi}}{2}$, prolongée sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité vérifie les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet : la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f ; ce qui donne après un petit calcul la première formule. Pour la seconde il suffit de considèrer la fonction g 2π-périodique, paire et égale à f sur $[0, \pi]$. Pour la dernière, considèrer la fonction h 2π-périodique, impaire et égale à f sur $]0, \pi[$ et vérifiant $h(0) = h(\pi) = h(-\pi) = 0$. Jordan-Dirichlet s'appliquant au trois fonctions, les trois séries convergent à l'origine respectivement vers $f(0), g(0), h(0)$.*

Remarque : *Moralité, les problème d'unicité pour les séries trigonométriques sont inifiement plus subtils que pour les séries entières ; ce n'est pas parce qu'une série trigonométrique converge vers une fonction qu'elle est la série de Fourier de cette fonction, surtout si le domaine de convergence est un intervalle de longueur strictement plus petite que 2π. Une condition suffisante pour pouvoir affirmer une telle chose que l'on recontre souvent est « la convergence uniforme sur un intervalle de longueur supérieure ou égale à 2π » . Toutefois, si la série de Fourier d'une fonction* ***continue*** *converge en un point, ce sera nécessairement vers la valeur de la fonction en ce point. Pour s'en persuader, il faut se souvenir que la convergence usuelle implique la convergence au sens de Césaro vers la même limite et que la série de Fourier d'une fonction continue converge toujours simplement au sens de Césaro vers la fonction [1].*

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Integration, volume 3 of Student Mathematical Library. AMS, 2003.