Séries entières, comportement au bord

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Séries entières, comportement au bord**

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence égal à* 1. *On suppose que* $\forall\, n \geq 1\ :\ a_n \geq 0$. *Si la série* $\sum_n a_n$ *diverge, montrer que* $\lim_{x\to 1_-} \sum_n a_n x^n = +\infty$.

Solution : *Vu les hypothèses,* $\forall\, A > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ :\ a_0 + a_1 + \cdots + a_m > A + 1$ *et par continuité de* $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ *il existe* $0 < \delta_A < 1$ *tel que pour tout* $x \in]1-\delta_A, 1[\ :$ $a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m > A$. *Tout étant positif, à fortiori* $\sum_n a_n x^n \geq a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m > A$. *En résumé*

$$\left(\forall\, A > 0,\ \exists\, \delta_A \in]0,1[\ :\ \forall\, x \in]1-\delta_A, 1[,\ \sum_n a_n x^n > A\right) \Longrightarrow \lim_{x\to 1_-} \sum_n a_n x^n = +\infty.$$

Références