Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On muni l'espace d'un repère orthonormal $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. *On considère la sphère* $\mathscr{S}$ *d'équation :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0$$

ainsi que le plan $\mathscr{P}$ *d'équation :*

$$3x - 4z + 19 = 0.$$

1. *Donner le centre* Ω *et le rayon* R *de* $\mathscr{S}$.
2. *Déterminer l'intersection de* $\mathscr{P}$ *et de* $\mathscr{S}$.
3. *Donner une représentation paramétrique de la droite* Δ *perpendiculaire à* $\mathscr{P}$ *qui passe par* Ω.
4. *Trouver les coordonnées des points* M *et* N *de* $\mathscr{S}$ *respectivement le plus proche et le plus éloigné de* $\mathscr{P}$ *en précisant les distances correspondantes (ces points sont sur* Δ*).*

Solution :

1. *On a :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

   Par conséquent $\mathscr{S}$ *est la sphère de centre* $\boxed{\Omega 1, -2, -3}$ *et de rayon* $\boxed{R = 5}$.

2. *Appliquant le cours :*

$$d(\Omega, \mathscr{P}) = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 3 + 19|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{34}{5} > 5$$

   L'intersection de $\mathscr{P}$ *et de* $\mathscr{S}$ *est donc vide.*

3. Un vecteur directeur à Δ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Par conséquent le vecteur $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix}3\\0\\-4\end{matrix}\right.$ dirige Δ. Une équation paramétrique de Δ est donc :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = -3 - 4t \end{cases}}$$

4. Les points de $\mathscr{S}$ à distance maximale et minimale de $\mathscr{P}$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25 \\ x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

et sont donc : $\boxed{M\left|\begin{matrix}-2\\-2\\1\end{matrix}\right.}$ *et* $\boxed{N\left|\begin{matrix}4\\-2\\-7\end{matrix}\right.}$*. Par suite :*

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|3 \times (-2) - 4 \times 1 + 19|}{5} = \boxed{\frac{9}{5}} \quad \text{et} \quad d(N, \mathscr{P}) = \frac{|3 \times 4 - 4 \times -7 + 19|}{5} = \boxed{\frac{59}{5}}$$

Le point le plus près de $\mathscr{P}$ est donc M et le plus loin est N.

Références