Séries entières, déterminant, systèmes linéaires

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Séries entières, déterminant, systèmes linéaires***
(`http://problemoftheweek...`)

Soit a, b, c, d des nombres complexes, si $d \neq 0$ et soit la suite $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ telle que

$$\frac{az+b}{z^2+cz+d} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \ldots$$

pour $|z|$ assez petit. Montrer que la quantité

$$\frac{\det \begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3} \end{pmatrix}}$$

est indépendante de n lorsque $abc - b^2 - ad^2 \neq 0$.

Solution :

1. ***Solution 1 :*** *De l'égalité*

$$az + b = (z^2 + cz + d) \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

on tire

$$c_0 = \frac{b}{d}, \quad c_1 = \frac{ad - bc}{d^2} \quad \text{et} \quad dc_{n+2} + cc_{n+1} + c_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

si bien que

$$\begin{aligned} c_{n+1}c_{n+3} - c_{n+2}^2 &= c_{n+1}\left(-\frac{c}{d}c_{n+2} - \frac{1}{d}c_{n+1}\right) - c_{n+2}^2 \\ &= -\frac{c}{d}c_{n+1}c_{n+2} - c_{n+2}^2 - \frac{1}{d}c_{n+1}^2 \\ &= c_{n+2}\left(-\frac{c}{d}c_{n+1} - c_{n+2}\right) - \frac{1}{d}c_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{d}\left(c_{n+2}c_n - c_{n+1}^2\right) \\ &\ldots \\ &= \frac{1}{d^{n+1}}\left(c_2 c_0 - c_1^2\right). \end{aligned}$$

- *Ainsi pour* $c_2c_0 - c_1^2 \neq 0$ *i.e.* $abc - b^2 - a^2d \neq 0$ *:*

$$\frac{\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3} \end{pmatrix}} = d$$

est bien indépendant de n*.*

- *Et pour* $abc - b^2 - a^2d = 0$ *on a*

$$\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3} \end{pmatrix} = 0$$

et le quotient n'est pas défini.

2. ***Solution 2 :*** *Toujours de l'égalité*

$$az + b = (z^2 + cz + d)\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

comparant les coefficients de z^{n+2} *et* z^{n+3} *des deux cotés on tire*

$$\begin{cases} c_n + cc_{n+1} + dc_{n+2} & = 0 \\ c_{n+1} + cc_{n+2} + dc_{n+3} & = 0 \end{cases}$$

En considérant ces deux égalités comme un système linéaire d'inconnues c *et* d*, les régles de Kramer donnent*

$$d = \frac{\det\begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3} \end{pmatrix}}$$

pourvu que le dénominateur ne s'annule pas, i.e.

$$\det\begin{pmatrix} c_{n+1} & c_{n+2} \\ c_{n+2} & c_{n+3} \end{pmatrix} = abc - b^2 - a^2d \neq 0.$$

Références