Séries de Fourier, dérivation

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **_Séries de Fourier, dérivation_**

[1], 2003.

Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0)=f(1)=0$. Avec les séries de Fourier, montrer que

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}.$$

Solution : *La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifiant $f(0)=f(1)=0$ il existe une unique fonction $\tilde{f}$ impaire, 2-périodique dont la restriction à $[0,1]$ est f. On vérifie sans peine que cette fonction est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même $\mathscr{C}^2$ par morceaux). Calculons ses coefficients de Fourier (complexes), bien entendu $c_0(\tilde{f})=0$ et pour $n \in \mathbb{Z}^\star$ une intégration par parties donne*

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2i\pi n}\int_{-1}^{1} \tilde{f}'(t)e^{-int}dt$$

une seconde intégration par parties est licite puisque $\tilde{f}'$ est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux :

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2i\pi n}\left[\frac{\tilde{f}'(t)e^{-int}}{-i\pi n}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2(i\pi n)^2}\int_{-1}^{1} \tilde{f}''(t)e^{-int}dt = -\frac{c_n(\tilde{f}'')}{\pi^2 n^2}$$

(le terme « entre crochets » est nul car $\tilde{f}'$ est paire). Vu la régularité de $\tilde{f}$, les théorèmes classiques nous assurent que la série de Fourier de $\tilde{f}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ avec pour somme $\tilde{f}$, soit

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\pi x} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{c_n(\tilde{f}'')}{n^2}e^{in\pi x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$\forall\, x \in [0,1] \quad : \quad |f(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{|c_n(\tilde{f}'')}{n^2}$$

soit en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($\sum_{n\geq 1} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$)

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0,1] \quad : \quad |f(x)|^2 &\leq \frac{1}{\pi^4}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(\tilde{f}'')|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}\frac{1}{n^4}\\ &\leq \frac{2}{\pi^4}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(\tilde{f}'')|^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{45}\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(\tilde{f}'')|^2\end{aligned}$$

$\tilde{f}''$ étant 2-périodique et continue par morceaux, on peut lui appliquer le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|\tilde{f}''(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star}|c_n(\tilde{f}'')|^2,$$

si bien que pour tout $x \in [0,1]$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{45}\|f''\|_2^2$$

soit

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$$

d'où le résultat.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.