Une fonction continue dont la série de Fourier diverge à l'origine

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Une fonction continue dont la série de Fourier diverge à l'origine

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin \left[\left(2^{n^3} + 1 \right) \frac{x}{2} \right].$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On désigne alors par f la fonction paire, continue, 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

2. Montrer que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

3. On pose pour $p, k \in \mathbb{N}$, $I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(pt) \sin \left(\frac{2k+1}{2} t \right) dt$, et pour tout entier $q \in \mathbb{N}$: $T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k}$.

(a) Calculer, pour p, k entiers naturels l'intégrale $I_{p,k}$.

(b) Pour $q, k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$.

(c) En déduire que $T_{q,k} \geq 0$ pour tout couple (q, k) d'entiers.

(d) Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1}$ au voisinage de $+\infty$.

(e) En déduire que $T_{k,k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\log(k)}{2}$.

4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3-1}}$.

5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geq -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3-1}, 2^{p^3-1}}$
(on pourra remarquer que $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{l=1}^N a_l(f) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{l=0}^N a_l(f) \dots$).

6. En déduire que la suite $(S_n(f)(0))_n$ diverge.

Solution :

1. La convergence normale est évidente ($\|f_n\|_\infty = 1/n^2$) la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ est donc une fonction continue sur $[0, \pi]$.
2. Par parité et prolongement 2π -périodique, $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$: f est donc bien continue en les points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ce qui était le seul point douteux.
3. a) De la formule $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ on tire

$$\begin{aligned}
 I_{p,k} &= \int_0^\pi \cos(pt) \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} + p\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} - p\right)t\right) \right] dt \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2} + p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2} + p} + \frac{\cos\left(\left(\frac{2k+1}{2} - p\right)t\right)}{\frac{2k+1}{2} - p} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{2(k+p)+1} + \frac{1}{2(k-p)+1}
 \end{aligned}$$

b) On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 T_{q,k} &= \sum_{p=0}^q I_{p,k} = \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k+p)+1} + \sum_{p=0}^q \frac{1}{2(k-p)+1} \\
 &= \sum_{j=k}^{k+q} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=k-q}^k \frac{1}{2j+1} \\
 &= \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1} \\
 &= c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}
 \end{aligned}$$

avec $c_k = \frac{1}{2k+1} > 0$.

c) Si $k \geq q$ il est évident que $T_{q,k} \geq 0$.

Maintenant, si $k < q$ il suffit de remarquer que

$$\sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1} = \sum_{j=k-q}^{q-k} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=q-k+1}^{k+q} \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2(q-k)+1} + \sum_{j=q-k+1}^{k+q} \frac{1}{2j+1} \geq 0$$

puisque $q - k + 1 \geq 0$.

d) Par décroissance de $x \mapsto (2x + 1)^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^N \frac{dt}{2t+1} \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq \int_0^N \frac{dt}{2t+1},$$

soit

$$\frac{\log(2N+1) - \log(3)}{2} \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\log(2N+1)}{2}$$

qui implique $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\log(N)}{2}$.

e) Avec (15-b) et (15-d)

$$T_{k,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\log(2k)}{2} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\log(k)}{2}.$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_p(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(pt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n \geq 1} f_n(t) \cos(pt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \int_0^{\pi} f_n(t) \cos(pt) dt \quad (\text{par NCV (question 13) sur } [0, \pi]) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \int_0^{\pi} \frac{1}{n^2} \sin \left[\left(2^{n^3} + 1 \right) \frac{t}{2} \right] \cos(pt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3-1}}. \end{aligned}$$

5. De l'égalité précédente et sachant que (15-c) les quantités $T_{p,k}$ sont toujours positives, on a pour tout $p \geq 1$

$$a_p(f) \geq \frac{2}{\pi n^2} I_{p, 2^{n^3-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S_{2^{N^3-1}}(f)(0) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{2^{N^3-1}} a_n(f) = -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=0}^{2^{N^3-1}} a_n(f) \\ &\geq -\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=0}^{2^{N^3-1}} \frac{2}{\pi N^2} I_{n, 2^{N^3-1}} \\ &= -\frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi N^2} T_{2^{N^3-1}, 2^{N^3-1}} \end{aligned}$$

6. L'équivalent obtenu en (15-e) nous donne

$$\frac{2}{\pi N^2} T_{2^{N^3-1}, 2^{N^3-1}} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi N^2} \frac{\log(2^{N^3-1})}{2} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{N^3 \log(2)}{\pi N^2} = \frac{N \log(2)}{\pi}.$$

Cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ avec N , on a avec la question (17)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2^{N^3-1}}(f)(0) = +\infty.$$

La suite $(S_n(f)(0))_n$ est donc divergente : f n'est pas développable en série de Fourier à l'origine.

Références