Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (2)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (2)***

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

1. *Montrer que* $f \in \mathscr{C}_0^{2\pi}$.
2. *Montrer que* f *est développable en série de Fourier sur* $\mathbb{R}$.
3. *On va montrer que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*
   - *Montrer que* $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi},\ \forall x \in [0, \pi/2]$.
   - *Soit* $x \in]0, \pi/2[$, *pour* $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ *(E est la partie entière...) montrer que*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1} \frac{\sin(kx)}{k^2} \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2} := \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + R_N(x).\end{aligned}$$

   - *Montrer que* $R_N(x) = \sum_{k\geq N+1} \frac{\varphi_n(x)}{x}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ *où* $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
   - *Montrer que pour* $x \in]0, \pi/2[$ *:*

$$|\varphi_n(x)| \leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$

   - *En déduire que pour* $x \in]0, \pi/2[$ *et* $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ *:*

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}.$$

   - *En déduire que* f *n'est pas dérivable à l'origine.*

Solution :

1. *Comme* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\sin(nx)/n^2| = 1/n^2$ *la série converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *:* f *est donc continue sur* $\mathbb{R}$*, elle bien entendu* 2π*-périodique.*
2. *La série définissant* f *est une série trigonométrique uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *: c'est donc la série de Fourier de* f*.*

   Pour justifier ce dernier point, si $f(x) = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}$ *où la convergence est uniforme sur un intervalle de longueur au moins* 2π*, il s'agit de montrer que pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:* $\alpha_k = c_k(f)$*. Nous avons*

   $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l e^{ilt}e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)t}dt = \alpha_k$$

   où l'inversion $\int\sum = \sum\int$ *est justifiée par l'uniforme convergence de la série sur* $[0, 2\pi]$ *) la série de Fourier de* f*.*
3. • *C'est une inégalité classique (inégalité de Jordan) souvent fort utile. Pour la démontrer on peut étudier la fonction ou mieux, invoquer la concavité de* $h\ :\ x \mapsto \sin(x)$ *sur* $[0, \pi/2]$ *qui implique que* h *est au dessus de la corde reliant* $(0, 0)$ *et* $(\pi/2, 1)$ *i.e. la droite d'équation* $y = 2x/\pi$*.*

   • *Soit* $x \in]0, \pi/2[$*, pour* $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$

   $$(\ 1 \leq k \leq N\ ) \quad \Longrightarrow \quad \left(0 < kx \leq \mathrm{E}(\pi/2x)x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

   on peut donc appliquer l'inégalité de Jordan

   $$\frac{\sin(kx)}{kx} \geq \frac{2kx}{\pi kx} = \frac{2}{\pi}, \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, N\},$$

   et par suite

   $$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\sin(kx)}{kx}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2}\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\sin(kx)}{k^2}.\end{aligned}$$

   • *C'est une « banale » transformation d'Abel.*

   • *Pour* $x \in]0, \pi/2[$ *:*

   $$\begin{aligned}|\varphi_n(x)| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}}\right)\right| &\leq \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right|\\ &= \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}\right|\\ &\leq \frac{2}{|2i\sin(x/2)|}\\ &\leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}\end{aligned}$$

   où l'on a appliqué encore une fois l'inégalité de Jordan dans la dernière inégalité.

• *D'où*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + R_n(x)\\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - |R_n(x)|\\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}|\varphi_n(x)|\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\sum_{k\geq N+1}\frac{\pi}{x}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{\pi}{N^2x^2}
\end{aligned}$$

.

• *Si x tends vers zéro, $N = \mathrm{E}(\pi/2x)$ tends vers $+\infty$ et N^2x^2/π tends vers $4/\pi$ de telle sorte que dans l'inégalité précédente le terme de droite tends vers l'infini avec N qui implique à son tour $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = +\infty$: f n'est pas dérivable à l'origine.*

Références