Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (1)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction continue non dérivable à l'origine mais développable en série de Fourier (1)***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique égale à $\sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$.

1. *Y a-t-il dans le cours un théorème permettant d'affirmer que f est développable en série de Fourier ?*
2. *Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, montrer que pour tout $x > 0$*
$$G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt.$$
En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe, est finie et strictement positive.
3. *Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$. à l'aide de la question précédente montrer que $a_n = 0(n^{-3/2})$.*
4. *Montrer sans Fejèr que f est développable en série de Fourier.*
5. *Montrer avec Fejèr que f est développable en série de Fourier.*

Solution :

1. *Non car en les points $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ f n'est pas dérivable et n'admet pas de dérivée à droite et à gauche (ailleurs f est continue et $\mathscr{C}^\infty$ sauf en les points $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou f n'est pas dérivable mais admet une dérivée à droite et à gauche).*

2. *C'est une bestiale intégration par parties faisant apparaître une intégrale généralisée (avec la régle habituelle qu'elle marche si deux termes parmi les trois existent : en zéro pas problème — faire un DL—) il en résulte (le premier terme à droite tend vers zéro car majoré par $1/2|x|$ et $\frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}$ est intégrable en l'infini puisque majoré en module par $1/|x|^2$) que $\lim_{x\to\infty} G(x)$ existe et vaut $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}dt = C > 0$.*

3. *On a :*

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{n\pi}}\frac{u}{\sqrt{n}}\cos(u^2)\frac{2u\,du}{n} \quad \text{(avec le changement } u=\sqrt{nt}\text{)} \\ &= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} u^2\cos(u^2)du \\ &= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\left(\left[\frac{u\sin^2(u)}{2}\right]_0^{\sqrt{n\pi}} - \int_0^{\sqrt{n\pi}}\frac{\sin(u^2)}{2}du\right) \\ &= -\frac{2}{\pi n^{3/2}}G(\sqrt{n\pi}) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2C}{\pi n^{3/2}} \quad \text{(d'après la question précédente).} \end{aligned}$$

4. *Vu ce qui précède, la série de Fourier de f : $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, par suite $S_f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$; la convergence normale nous dit aussi que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ est la série de Fourier de S_f i.e. les deux fonctions continues f et S_f ont les mêmes coefficients de Fourier : donc $f = S_f$ (par exemple via Parseval appliqué à $f - S_f$...) i.e.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx),$$

f est donc bien développable en série de Fourier.

5. *Le théorème de Féjer[1] assure que les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction f continue convergent au sens de Césaro vers f, c'est donc ici le cas, mais la série de Fourier de f est aussi convergente sur $\mathbb{R}$ et la convergence usuelle implique la convergence au sens de Césaro et vers la même limite : le résultat suit.*

Références