

# Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

2 février 2023

## Exercice 0.1 ★ Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier

A.Pommellet, [1]-6, 1992/93. On appelle **polynôme trigonométrique** toute application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $P(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ ; et toute application du type  $P(t) =$

$\sum_{k=-n}^n a_k e^{i\lambda_k t}$ , avec  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  est un **polynôme trigonométrique généralisé**.

L'objectif de cet exercice est d'établir à l'aide des séries de Fourier la célèbre inégalité suivante, due au mathématicien russe BERNSTEIN :

$$\|P'\|_\infty \leq n \|P\|_\infty \quad \text{pour tout polynôme trigonométrique } P.(\star)$$

Pour tout polynôme trigonométrique généralisé, on pose  $\Lambda := \max_{-n \leq k \leq n} |\lambda_k|$ , on va montrer que

$$\|P'\|_\infty \leq \Lambda \|P\|_\infty \quad \text{pour tout polynôme trigonométrique généralisé } P.(\star)$$

1. Montrer que  $(\star) \implies (\star)$ .
2. Montrer que pour établir  $(\star)$  on peut toujours supposer que  $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ .
3. Soit  $\Psi$  la fonction numérique qui vaut  $t$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\pi - t$  sur  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  et qui est prolongée par  $2\pi$ -périodicité sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Montrer que

$$\Psi(t) = \sum_{l \geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin((2l+1)t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que  $P'(t) = i \sum_{k=-n}^n a_k \Psi(\lambda_k) e^{i\lambda_k t}$ .

5. En déduire que  $P'(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} \left( \sum_{k=-n}^n a_k e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - \sum_{k=-n}^n a_k e^{i(t-2l-1)\lambda_k} \right)$

6. Puis  $\|P'\|_\infty \leq \frac{4}{\pi} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} \right) \|P\|_\infty$  et conclure.

**Solution :**

1. C'est clair, car dans ce cas :  $\Lambda = \max\{0, 1, \dots, n\} = n$ .
2. Si  $\Lambda = 0$ ,  $P$  est constant et on a même égalité. Si  $\Lambda > 0$  est différent de  $\pi/2$  on fait le changement de variable  $u = \frac{2}{\pi\Lambda}t$  et

$$P(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\lambda_k t} = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda} \frac{2\Lambda}{\pi} t} = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda} u} = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\tilde{\lambda}_k u} = \tilde{P}(u)$$

on a donc :  $\tilde{P}(x) = P(\frac{\pi x}{2\Lambda})$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $\tilde{\Lambda} = \frac{\pi}{2}$  soit

$$\|P\|_{\infty} = \|\tilde{P}\|_{\infty}, \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2\Lambda} \|P'\|_{\infty} = \|\tilde{P}'\|_{\infty}$$

(on a ici implicitement utilisé la relation évidente  $\tilde{P}' = (\tilde{P})'$ ). Supposons maintenant  $(\star)$  vraie si  $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ , pour tout polynôme trigonométrique généralisé on aura

$$\|\tilde{P}'\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \|\tilde{P}\|_{\infty}, \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{2\Lambda} \|P'\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \|P\|_{\infty}$$

i.e.

$$\|P'\|_{\infty} \leq \Lambda \|P\|_{\infty} (\star)$$

Il ne reste donc plus qu'à établir  $(\star)$  pour tout polynôme trigonométrique généralisé vérifiant  $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ .

3.  $\Psi$  est continue,  $2\pi$  périodique et  $C^1$  par morceaux, le théorème de Dirichlet nous assure que la série de Fourier de  $\Psi$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\Psi$ . Et un calcul élémentaire nous donne

$$\Psi(t) = \sum_{l \geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin((2l+1)t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Soit donc  $P(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{i\lambda_k t}$  un polynôme trigonométrique généralisé vérifiant  $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ .

La grande astuce consiste à remarquer qu'alors

$$\left(\Lambda = \frac{\pi}{2}\right) \implies (\lambda_k = \Psi(\lambda_k), \quad -n \leq k \leq n) \quad \text{puisque sur} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \Psi(t) = t$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
 |P'(t)| &= \left| \sum_{k=-n}^n a_k i \lambda_k e^{i \lambda_k t} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=-n}^n i a_k \Psi(\lambda_k) e^{i \lambda_k t} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=-n}^n i a_k \left( \sum_{l \geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin((2l+1)\lambda_k) \right) e^{i \lambda_k t} \right| \\
 &= \left| \sum_{l \geq 0} \sum_{k=-n}^n \frac{2(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} a_k \left( e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - e^{i(t-2l-1)\lambda_k} \right) \right| \\
 &\leq \sum_{l \geq 0} \frac{2}{\pi(2l+1)^2} (|P(t+2l+1)| + |P(t-2l-1)|) \\
 &\leq \frac{4\|P\|_\infty}{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{(2l+1)^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} \|P\|_\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

(dans la dernière inégalité on a utilisé  $\sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  qu'on déduit de  $\sum \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \dots$ ) soit  $\|P'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} \|P\|_\infty$  d'où (\*) si  $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ , et d'où (\*) pour tout polynôme trigonométrique généralisé vu la deuxième question, d'où l'inégalité de Bernstein par la première question.

## Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.