Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

2 février 2023

Exercice 0.1 ★ _Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier_

A.Pommellet, [1]-6, 1992/93. On appelle ***polynôme trigonométrique*** *toute application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *de la forme* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt},\ a_k \in \mathbb{C}$ *; et toute application du type* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$*, avec* $a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *est un* ***polynôme trigonométrique généralisé****.*

L'objectif de cet exercice est d'établir à l'aide des séries de Fourier la célébre inégalité suivante, due au mathématicien russe Bernstein *:*

$$\|P'\|_\infty \leq n\,\|P\|_\infty \quad \textit{pour tout polynôme trigonométrique } P.(\bigstar)$$

Pour tout polynôme trigonométrique généralisé, on pose $\Lambda := \max_{-n\leq k\leq n} |\lambda_k|$*, on va montrer que*

$$\|P'\|_\infty \leq \Lambda\,\|P\|_\infty \quad \textit{pour tout polynôme trigonométrique généralisé } P.(\star)$$

1. *] Montrer que* $(\star) \implies (\bigstar)$.
2. *Montrer que pour établir* $(\star)$ *on peut toujours supposer que* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$.
3. *Soit* Ψ *la fonction numérique qui vaut* t *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\pi - t$ *sur* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ *et qui est prolongée par* 2π*-périodicité sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. Montrer que*
$$\Psi(t) = \sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin((2l+1)t)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
4. *Montrer que* $P'(t) = i \sum_{k=-n}^{n} a_k \Psi(\lambda_k) e i\lambda_k t$.
5. *En déduire que* $P'(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t-2l-1)\lambda_k}\right)$
6. *Puis* $\|P'\|_\infty \leq \frac{4}{\pi}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}\right)\|P\|_\infty$ *et conclure.*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.