Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ **Inégalité de Bernstein via les séries de Fourier**

A.Pommellet, [1]-6, 1992/93. On appelle **polynôme trigonométrique** *toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$, $a_k \in \mathbb{C}$ *; et toute application du type* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$*, avec* $a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *est un* **polynôme trigonométrique généralisé***.*

L'objectif de cet exercice est d'établir à l'aide des séries de Fourier la célébre inégalité suivante, due au mathématicien russe Bernstein *:*

$$\|P'\|_\infty \leq n \, \|P\|_\infty \quad \text{pour tout polynôme trigonométrique } P.(\bigstar)$$

Pour tout polynôme trigonométrique généralisé, on pose $\Lambda := \max_{-n \leq k \leq n} |\lambda_k|$*, on va montrer que*

$$\|P'\|_\infty \leq \Lambda \, \|P\|_\infty \quad \text{pour tout polynôme trigonométrique généralisé } P.(\star)$$

1. *] Montrer que* $(\star) \implies (\bigstar)$*.*
2. *Montrer que pour établir* $(\star)$ *on peut toujours supposer que* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$*.*
3. *Soit* Ψ *la fonction numérique qui vaut* t *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\pi - t$ *sur* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ *et qui est prolongée par* 2π*-périodicité sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. Montrer que*
$$\Psi(t) = \sum_{l \geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} \sin\left((2l+1)t\right), \quad \forall \, t \in \mathbb{R}.$$
4. *Montrer que* $P'(t) = i \sum_{k=-n}^{n} a_k \Psi(\lambda_k) e i \lambda_k t$*.*
5. *En déduire que* $P'(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i(t-2l-1)\lambda_k} \right)$
6. *Puis* $\|P'\|_\infty \leq \frac{4}{\pi} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} \right) \|P\|_\infty$ *et conclure.*

Solution :

1. *C'est clair, car dans ce cas :* $\Lambda = \max\{0, 1 \dots, n\} = n$.
2. *Si* $\Lambda = 0$, P *est constant et on a même égalité. Si* $\Lambda > 0$ *est différent de* $\pi/2$ *on fait le changement de variable* $u = \frac{2}{\pi\Lambda}t$ *et*

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda}\frac{2\Lambda}{\pi}t} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\frac{\pi\lambda_k}{2\Lambda}u} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\tilde{\lambda}_k u} = \tilde{P}(u)$$

on a donc : $\tilde{P}(x) = P(\frac{\pi x}{2\Lambda})$ *sur* $\mathbb{R}$, *et* $\tilde{\Lambda} = \frac{\pi}{2}$ *soit*

$$\|P\|_\infty = \|\tilde{P}\|_\infty, \quad \textit{et} \quad \frac{\pi}{2\Lambda}\|P'\|_\infty = \|\tilde{P}'\|_\infty$$

(on a ici implicitement utilisé la relation évidente $\widetilde{P'} = (\tilde{P})'$*). Supposons maintenant* $(\star)$ *vraie si* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, *pour tout polynôme trigonométrique généralisé on aura*

$$\|\tilde{P}'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|\tilde{P}\|_\infty, \quad \textit{soit} \quad \frac{\pi}{2\Lambda}\|P'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty$$

i.e.

$$\|P'\|_\infty \leq \Lambda\, \|P\|_\infty (\star)$$

Il ne reste donc plus qu'à établir $(\star)$ pour tout polynôme trigonométrique généralisé vérifiant $\Lambda = \frac{\pi}{2}$.

3. Ψ *est continue,* 2π *périodique et* C^1 *par morceaux, le théorème de Dirichlet nous assure que la série de Fourier de* Ψ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$ *vers* Ψ. *Et un calcul élémentaire nous donne*

$$\Psi(t) = \sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2}\sin\left((2l+1)t\right), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

4. *Soit donc* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$ *un polynôme trigonométrique généralisé vérifiant* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$. *La grande astuce consiste à remarquer qu'alors*

$$\left(\Lambda = \frac{\pi}{2}\right) \implies (\lambda_k = \Psi(\lambda_k), \quad -n \leq k \leq n) \quad \textit{puisque sur} \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ :\ \Psi(t) = t$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
|P'(t)| &= \left|\sum_{k=-n}^{n} a_k i\lambda_k e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{k=-n}^{n} ia_k \Psi(\lambda_k) e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{k=-n}^{n} ia_k \left(\sum_{l\geq 0} \frac{4(-1)^l}{\pi(2l+1)^2}\sin\left((2l+1)\lambda_k\right)\right) e^{i\lambda_k t}\right| \\
&= \left|\sum_{l\geq 0}\sum_{k=-n}^{n} \frac{2(-1)^l}{\pi(2l+1)^2} a_k \left(e^{i(t+2l+1)\lambda_k} - e^{i(t-2l-1)\lambda_k}\right)\right| \\
&\leq \sum_{l\geq 0} \frac{2}{\pi(2l+1)^2}\left(|P\left(t+2l+1\right)| + |P\left(t-2l-1\right)|\right) \\
&\leq \frac{4\|P\|_\infty}{\pi}\sum_{l\geq 0}\frac{1}{(2l+1)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

(dans la dernière inégalité on a utilisé $\sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ *qu'on déduit de* $\sum \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6}$*...) soit* $\|P'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|P\|_\infty$ *d'où* $(\star)$ *si* $\Lambda = \frac{\pi}{2}$*, et d'où* $(\star)$ *pour tout polynôme trigonométrique généralisé vu la deuxième question , d'où l'inégalité de Bernstein par la première question .*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.