Développement en série de Fourier de $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$, série entière

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Développement en série de Fourier de*** $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$***, série entière***

([1],1997/98). Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$.

Solution : *f est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ (Dirichlet).*

Il est sage de se persuader qu'un calcul direct des coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}\cos(nx)dx$$

est plus qu'incertain, voire déconseillé, voici donc deux méthodes qui donnent ce développement par des chemins détournés.

1. ***Première méthode :***

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = \frac{2+e^{ix}+e^{-ix}}{2(4-e^{ix}-e^{-ix})} = \frac{2e^{ix}+e^{2ix}+1}{2(4e^{ix}-e^{2ix}-1)} = F(e^{ix}) \text{ où } F(X) = -\frac{X^2+2X+1}{2(X^2-4X+1)}$$

Les pôles de F sont $\alpha = 2-\sqrt{3}$ et α^{-1} et on peut (après avoir décomposé en éléments simples) développer F en puissance relatives de X, (on retrouve le développement en série de Laurent de la fonction méromorphe F sur $\mathbb{C}$ sur la couronne $C(0,\alpha,\alpha^{-1})$ pour ceux qui s'en souviennent)

$$\begin{aligned} F(X) &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha\sqrt{3}}{X(1-\frac{\alpha}{X})} - \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha X}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{|n|}X^n, \qquad \alpha < |X| < \alpha^{-1} \end{aligned}$$

le cercle unité étant clairement inclus dans la couronne $\{\alpha < |X| < \alpha^{-1}\}$ on peut faire $X = e^{ix}$ dans le développement précédent

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} = F(e^{ix}) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{|n|}e^{inx} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n\cos(nx),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Nous avons donc trouvé un développement en série trigonométrique de f sur $\mathbb{R}$, visiblement normallement convergente sur $\mathbb{R}$: ***c'est*** *le développement en série de Fourier de f (la convergence uniforme sur un intervalle de longueur 2π permet de s'en assurer (échange justifié de somme et d'intégrale))*

2. ***Seconde méthode :*** *nous savons que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)}$ qu'on peut aussi écrire*

$$(4-2\cos(x))\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = 1+\cos(x)$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$ en réordonnant, on trouve

$$(4a_0-a_1-1)+(4a_1-a_0-a_2-1)\cos(x)+\sum_{n\geq 2}(4a_n-a_{n-1}-a_{n+1})\cos(nx) = 0$$

cette série trigonométrique étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ses coefficients sont nuls (c'est du cours) donc

$$(\bigstar)\qquad \begin{cases} 4a_0-a_1 & = 1\\ 4a_1-a_0-a_2 & = 1\\ 4a_n-a_{n-1}-a_{n+1} & = 0,\quad \forall\, n\geq 2.\end{cases}$$

on retrouve un système classique à résoudre : son équation caractéristique est $r^2-4r+1=0$ la solution générale est $a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Comme $\lim_n a_n = 0$, λ est nul et $a_n = a_1\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $n\geq 1$, enfin avec les deux premières équations de $(\bigstar)$ il vient $a_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $a_1 = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ et finalement

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n\geq 1}\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)^n\cos(nx).$$

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.