$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m} \cos(m^2 x)$ n'est pas développable en série entière

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m} \cos(m^2 x)$ ***n'est pas développable en série entière***

Exemple d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor en $x = 0$ admet un rayon de convergence nul :

Soit

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m} \cos(m^2 x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x),$$

montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas développable en série entière à l'origine.

Solution : *Que f soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que l'on puisse dériver sous la somme relève du théorème de Weierstrass, en effet les séries des dérivées de tout ordre sont normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle « l'emporte » sur la puissance et les fonctions* sin *et* cos *sont bornées sur $\mathbb{R}$...*

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R} \;:\; f^{(k)}(x) = \sum_{m \geq 0} f_m^{(k)}(x)$$

en particulier

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sum_{m \geq 0} e^{-m} (m^2)^{2n}.$$

Donc, sous réserve de convergence, la série de Taylor de f à l'origine est donnée par (les dérivées impaires de f sont nulles)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \left(\sum_{m \geq 0} e^{-m} (m^2)^{2n} \right).$$

en particulier

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}|f^{(2n)}(0)| &= \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\sum_{m\geq 0} e^{-m}m^{4n}\\ &\geq \left(\frac{|x|}{2n}\right)^{2n}\sum_{m\geq 0} e^{-m}m^{4n}\\ &\geq \left(\frac{|x|m^2}{2n}\right)^{2n} e^{-m}, \quad \forall\, m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

et si on prend $m = 2n$

$$\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}|f^{(2n)}(0)| \geq \left(\frac{|x|2n}{e}\right)^{2n} \geq 1 \quad \text{dès que} \quad n > \frac{e}{2|x|}$$

i.e. pour tout $x\in\mathbb{R}$, le terme général de la série de Taylor de f à l'origine ne tend pas vers zéro dès que $x\neq 0$: la série diverge grossièrement, le rayon de convergence est donc nul.

Remarque :

voir aussi l'exercice ? ? ? pour l'exemple archi-classique d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ non développable en série entière à l'origine à série de Taylor à l'origine convergente sur $\mathbb{R}$.

Références