

Une caractérisation de la fonction sinus

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Une caractérisation de la fonction sinus

[1] (3)-2005/06

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application 2π -périodique. Si $f'(0) = 1$ et $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ montrer que $f(x) = \sin(x)$.

Solution :

1. **Le cas 2π -périodique** **Première étape :** f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -périodique on peut donc lui appliquer les relations bien connues reliant les coefficients de Fourier d'une fonction à ceux de ses dérivées :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

qui impliquent

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad |c_n(f^{(k)})| = |n|^k |c_n(f)|. (\star)$$

Soit, vu les hypothèses sur f et ses dérivées :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad |c_n(f^{(k)})| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) e^{-int} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) e^{-int} dt \right| \leq 1. (\star)$$

Supposons maintenant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$|n_0| \geq 2 \quad \text{et} \quad |c_{n_0}(f)| > 0$$

alors vu $(\star)$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |c_{n_0}(f^{(k)})| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |n_0|^k |c_{n_0}(f)| = +\infty$$

contredisant $(\star)$, ainsi

$$c_n(f) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

et la série de Fourier de f est de la forme

$$c_{-1}(f)e^{-ix} + c_0(f) + c_1(f)e^{ix} = a \cos(x) + b \sin(x) + c \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

f étant $\mathcal{C}^\infty$ et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, les théorèmes classiques de convergence nous assurent que

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + c, \quad \forall x \in]-\pi, \pi[.$$

Seconde étape : Il ne reste plus qu'à exploiter les trois dernières hypothèses

$$f'(0) = 1, \quad \|f\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f'\|_\infty \leq 1$$

En effet, $f'(0) = 1$ implique $b = 1$ et, au voisinage de zéro

$$f'(x) = a \sin(x) - \cos(x) = -1 + ax + o(x)$$

qui sera, si $a \neq 0$, strictement plus petit que -1 lorsque x tendra vers zéro suivant le signe contraire de a : c'est contraire à l'hypothèse et donc $a = 0$. Regardant au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, on obtient $c = 0$, soit finalement

$$f(x) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Q.E.D.

Remarque : Sans la 2π -périodicité, on pourrai bien sûr envisager de réitérer le même raisonnement sur la fonction g 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ et égale à f sur $]-\pi, \pi]$ pour en déduire que g puis f (car f est clairement développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et égale à g sur $]-\pi, \pi]$) coïncide avec la fonction sinus sur $]-\pi, \pi]$; mais malheureusement une obstruction apparaît : g n'étant même plus continue (à priori) en les points de $\pi\mathbb{Z}$, les formules $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} : c_n(g^{(k)}) = (in)^k c_n(g)$ ne sont plus valables. En effet elle s'obtiennent après k intégrations par parties dans $c_n(g^{(k)})$, les termes « entre crochets » disparaissant grâce au caractère continu (et la 2π périodicité) de g en $-\pi$ et π ; de ce fait, dans notre cas, la non continuité de g et à fortiori de ses dérivées en ces points va faire apparaître à droite un polynôme en n qui (semble) rendre vain tout espoir de généralisation par cette méthode....

2. **Le cas général** On va proposer deux solutions (ces deux solutions sont tirées du volume 116-3 de la RMS, [1]), l'une s'appuyant sur la théorie des fonctions holomorphes, l'autre sur l'analyse fonctionnelle. Commençons par fixer quelques notations communes aux deux solutions.

Pour toute fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. L'espace vectoriel

$$\mathcal{E}_{\mathbb{C}} := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq c\}$$

(on définit de même l'espace réel $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$) sera normé par $N(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f^{(n)}\|$; on désignera par $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ des applications à valeurs réelles. Enfin, $\mathcal{B}$ désignera l'espace des fonctions entières f vérifiant

$$\exists c > 0 : \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq ce^{|Im(z)|},$$

il est normé par $N_{\mathcal{B}}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|e^{-|Im(z)|}$.

Notre objectif est alors le suivant

Théorème : La solution dans $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ de $N(f) \leq 1$ & $f'(0) = 1$ est $f = \sin$.

Résultats préliminaires :

$\rightsquigarrow$ Pour toute application $f \in \mathcal{E}$, il existe une unique fonction entière $\tilde{f}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est f . De plus, $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ et $N_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) \leq N(f)$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$ (resp. $\tau \in \mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{B}$) les translatés $x \mapsto f_t(x) = f(x+t)$ (resp. f_τ) restent dans $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{B}$).

$\rightsquigarrow$ De toute suite $(f_n)_n$ bornée de $(\mathcal{E}, N)$ il existe une application $f \in \mathcal{E}$ et une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telles que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_{n_k}^{(j)})_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $f^{(j)}$ (i.e. converge dans¹ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

Preuve : Les hypothèses sur f assurent qu'elle est la restriction à la droite réelle de la série entière

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

de rayon de convergence infini. En outre pour tout $x + iy \in \mathbb{C}$

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq \sum_{n \geq 0} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (iy)^n \right| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|y|^n}{n!} = e^{|y|} N(f)$$

soit $f \in \mathcal{B}$ et $N_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) \leq N(f)$.

La seconde assertion est immédiate et la troisième se déduit du fait que toute partie bornée de $(\mathcal{E}, N)$ est bornée dans l'espace de Montel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. $\square$

Première solution : Pour $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ posons

$$Q(f) = f(0)^2 + f'(0)^2, \quad R(f) = \|f^2 + f'^2\|.$$

Il est clair que $Q(f) \leq R(f) \leq 2N(f)^2$, $\forall f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$, ce qui justifie la définition

$$\rho := \sup_{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}, N(f) \leq 1} R(f).$$

La démonstration repose sur la détermination de ρ et l'étude de $X := \{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}} : N(f) \leq 1 \text{ et } Q(f) = \rho\}$, elle se divise en trois étapes.

On peut déjà remarquer que $\rho \geq 1$ car l'application $x \mapsto \sin(x)$ est dans $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

L'ensemble X est non vide.

En effet, considérons une suite $(f_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ telle que

$$N(f_k) \leq 1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(f_k) = \rho.$$

Quitte à remplacer chaque f_k par une de ses translatés (via le lemme, mais il faut être tout de même délicat car le « sup » peut être atteint « à l'infini » ...) on peut supposer que $\lim_k Q(f_k) = \rho$. La troisième assertion du lemme assure alors de l'existence d'une sous-suite

$(f_{n_k})_k$ et d'une application $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ telles que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_{n_k}^{(j)})_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $f^{(j)}$. Clairement, $f \in X$ qui est non vide. $\square$

Soit $f \in X$. Si $f'(0) \neq 0$, alors $f''(0) = -f'(0)$ et $f' \in X$.

Vu la définition de ρ et de X , pour toute $f \in X$, la fonction $g := f^2 + f'^2$ admet un maximum local en $x = 0$, soit $g'(0) = 0$ et le résultat suit. $\square$

$\rho = 1$.

Supposons par l'absurde que $\rho > 1$. Dans ce cas, pour tout $f \in X : f(0)f'(0) \neq 0$ (ne pas oublier que dans ce cas $Q(f) = f^2(0) + f'^2(0) > 1$ et $\max\{|f(0)|, |f'(0)|\} \leq 1$...); on peut donc, en invoquant la seconde étape, en déduire que

$$\forall f \in X, n \in \mathbb{N} : f^{(n)} \in X \quad \text{et} \quad f^{n+2}(0) = -f^{(n)}(0).$$

Toutes les applications f étant développables en série entière, X est donc inclu dans le plan engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$, mais sur ce plan Q et N^2 coïncident ce qui contredit l'assertion $\rho > 1$. $\square$

Preuve du théorème : Considérons

$$Y = \{ f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}} : N(f) \leq 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1 \}.$$

Vu ce qui précède, $Y \subset X$ et $\forall f \in Y : f(0) = 0$. Pour conclure, il suffit de montrer que

$$(f \in Y) \implies (-f'' \in Y),$$

en effet, si tel est le cas on aura

$$\forall f \in Y, \forall n \in \mathbb{N} : f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

soit (f étant développable en série entière) $f = \sin$.

Soit donc $f \in Y$. En considérant à nouveau $g = f^2 + f'^2$, comme g présente à l'origine un maximum local, donc $g''(0) \leq 0$ qui implique (pas clair encore...) $f'''(0) \leq -1$; et comme $N(f) \leq 1$ ceci implique $f'''(0) = -1$ i.e. $-f'' \in Y$, ce qu'il restait à établir. $\square$

Seconde solution :

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.