

approximation, convergence uniforme

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ approximation, convergence uniforme

Si une suite de polynômes converge uniformément sur \mathbb{R} , alors sa limite est un polynôme.

Solution : Soit $(P_n)_n$ une telle suite et f sa limite. La suite $(P_n)_n$ satisfait donc au critère de Cauchy uniforme sur \mathbb{R} , en particulier avec $\varepsilon = 1$

$$(\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \ \& \ p \in \mathbb{N}) \implies \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - P_{n+p}(x)| \leq 1 \right)$$

en particulier pour $p \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_N - P_{N+p}$ borné sur \mathbb{R} est constant

$$\forall p \in \mathbb{N} : \exists C_p \in \mathbb{R} : P_N - P_{N+p} = C_p \quad (\star)$$

et puisque

$$\lim_p P_{N+p}(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

en faisant $x = 0$ dans (\star) on en déduit que la suite $(C_p)_p$ converge

$$\lim_p (P_N(0) - P_{N+p}(0)) = P_N(0) - f(0) = l = \lim_p C_p.$$

On passe alors à la limite sur p dans (\star) pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ arbitraire :

$$l = \lim_p C_p = \lim_p (P_N(x) - P_{N+p}(x)) = P_N(x) - f(x)$$

soit

$$f(x) = l + P_N(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Références