approximation, convergence uniforme

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***approximation, convergence uniforme***

Si une suite de polynômes converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est un polynôme.

Solution : *Soit $(P_n)_n$ une telle suite et f sa limite. La suite $(P_n)_n$ satisfait donc au critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$, en particulier avec $\varepsilon = 1$*

$$(\exists N \in \mathbb{N}\ :\ n \geq N\ \&\ p \in \mathbb{N}\ ) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |P_n(x) - P_{n+p}(x)| \leq 1\right)$$

en particulier pour $p \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_N - P_{N+p}$ borné sur $\mathbb{R}$ est constant

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\ :\ \exists\, C_p \in \mathbb{R}\ :\ P_N - P_{N+p} = C_p \qquad (\star)$$

et puisque

$$\lim_p P_{N+p}(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

en faisant $x = 0$ dans $(\star)$ on en déduit que la suite $(C_p)_p$ converge

$$\lim_p \left(P_N(0) - P_{N+p}(0)\right) = P_N(0) - f(0) = l = \lim_p C_p.$$

On passe alors à la limite sur p dans $(\star)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ arbitraire :

$$l = \lim_p C_p = \lim_p \left(P_N(x) - P_{N+p}(x)\right) = P_N(x) - f(x)$$

soit

$$f(x) = l + P_N(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Références