Étude des séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n f(t)$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Étude des séries de fonctions*** $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ ***et*** $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n f(t)$

([1] 1993/94 et 1997/98.)

1. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une application bornée. Montrer que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *si et seulement si* f *est dérivable en* $t=1$ *avec* $f(1) = f'(1) = 0$.
2. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une application bornée. Étudier la simple puis uniforme convergence de la série* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n f(t)$ *sur* $[0,1[$.

Solution :

1. *Notons pour* $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n f(t) \end{cases}$$

-Remarquons qu'il y a bien sûr simple convergence sur $[0,1[$ *de somme* $\frac{f(t)}{1+t}$. *En outre il y aura convergence en* $t=1$ *si, et seulement si,* $f(1) = 0$. *En résumé la série est simplement convergente sur* $[0,1]$ *si, et seulement si,* $f(1) = 0$ *et*

$$\sum_{n\geq 0} t^n f(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{1+t} & si \ \ t \in [0,1[\\ 0 & si \ \ t = 1. \end{cases}$$

-Supposons $f(1) = 0$ *et désignons par* R_n *le reste d'ordre* n *de la série simplement convergente* $\sum_{n\geq 0} f_n$. *On a donc :*

$$\begin{cases} R_n(t) & = & \sum_{k\geq n+1} t^k f(t) = \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} = -t^{n+1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}, \ t \in [0,1[\\ R_n(1) & = & 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *Supposons* f *dérivable en* $t=1$ *avec* $f'(1) = 0$ *et soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* $0 < \eta < 1$ *tel que*

$$\forall\, t \in [1-\eta, 1[, \quad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq \varepsilon,$$

de sorte que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [1-\eta, 1[\quad : \quad |R_n(t)| \leq t^{n+1}\varepsilon \leq \varepsilon.(1)$$

D'autre part, l'application $t \mapsto \frac{f(t)-f(1)}{t-1}$ *est bornée sur* $[0, 1-\eta,]$, *il existe donc* $M > 0$ *tel que*

$$\forall\, t \in [0, 1-\eta], \quad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq M$$

soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0, 1-\eta] \quad : \quad |R_n(t)| \leq M(1-\eta)^{n+1}.(2)$$

Puisque $0 < \eta < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(1-\eta)^{n+1}M = 0$ *si bien qu'en combinant* $(1),\ (2)$ *et* $R_n(1) = 0$ *on peut écrire*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \implies \sup_{t\in[0,1]} |R_n(t)| \leq \varepsilon$$

qui équivaut à l'uniforme convergence sur $[0, 1]$ *de* $\sum_n f_n$.

$\rightsquigarrow$ *Réciproquement, supposons la convergence uniforme sur* $[0, 1]$ *et soit* $\varepsilon > 0$ *fixé. Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq N \implies |R_n(t)| \leq \varepsilon$$

soit

$$\forall\, t \in [0, 1] \ : \ \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq \varepsilon t^{-(N+1)}(3)$$

et comme $\lim_{t\to 1_-} t^{-(N+1)} = 1$ *il existe* $0 < \eta < 1$ *tel que*

$$1-\eta < t \leq 1 \quad \implies \quad 0 \leq t^{-(N+1)} \leq 2(4)$$

(3) *et* (4) *nous donnent*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta \in]0, 1[\quad : \quad \left|\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\right| \leq 2\varepsilon$$

i.e. f *est dérivable en* $t = 1$ *et* $f'(1) = 0$

En résumé, la série $\sum_{n\geq 0} t^n f(t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si, et seulement si f est dérivable au point $t = 1$ avec $f(1) = f'(1) = 0$.

2. *-Pour $0 \leq t < 1$ la série est bien évidement convergente avec $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n f(t) = \frac{f(t)}{1+t}$. Pour $t = 1$ la série converge si et seulement si, $f(1) = 0$.*

   -Étudions maintenant la convergence uniforme sur $[0, 1[$. Le reste de la série est

$$R_n(t) := \sum_{k\geq n+1} (-1)^k t^k f(t) = \frac{(-t)^{n+1} f(t)}{1+t},$$

   si bien que ($\frac{1}{1+t}$ variant sur $[0, 1[$ entre $1/2$ et 1) la série converge uniformément sur $[0, 1[$ si, et seulement si, la suite $(t^{n+1} f(t))_n$ tend uniformément vers zéro sur $[0, 1[$. Supposons que f tende vers 0 en 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta < 1$ tel que

$$1 - \eta < t < 1 \quad \Longrightarrow |f(t)| \leq \varepsilon.$$

   Par ailleurs, f est bornée sur $[0, 1 - \eta]$:

$$\exists\, M > 0 \;:\quad |f(t)| \leq M, \quad \forall\, t \in [0, 1 - \eta]$$

   soit

$$|R_n| \leq \frac{\max\{\varepsilon, M(1-\eta)^{n+1}\}}{1+t} \leq 2\varepsilon, \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

   d'où la convergence uniforme sur $[0, 1[$ et donc sur $[0, 1]$ si on pose $f(1) = 0$.

   -Supposons maintenant la convergence uniforme sur $[0, 1[$, en particulier pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |t^{n+1} f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, 1[$$

   et posant $\eta = 1 - 2^{-\frac{1}{n+1}}$ on a $|f(t)| \leq 2\varepsilon,\ \forall\, t \in [1 - \eta, 1[$, autrement dit

$$\lim_{t\to 1_-} f(t) = 0$$

   -En résumé, la série converge uniformément sur $[0, 1[$ si, et seulement si $\lim_{t\to 1_-} f(t) = 0$. Si par ailleurs $f(1) = 0$ la convergence est alors uniforme sur $[0, 1]$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.