Convergence uniforme et convergence continue

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Convergence uniforme et convergence continue***

[1]

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide (ou plus généralement d'un espace vectoriel normé) et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans $\mathbb{K}$. On dira que la suite $(f_n)_n$ ***converge continuement*** *vers $f : A \to \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ convergente vers x la suite $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

1. *Montrer que la convergence continue implique la convergence simple.*
2. *Soit $(f_n)_n$ une telle suite, $x \in A$ et $(x_n)_n$ dans A convergente vers x. Montrer que pour toute sous-suite $(f_{n_k})_k$*
$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$
3. *Si $(f_n)_n$ converge continuement vers f sur A, montrer que f est continue sur A (**même** si les f_n ne sont pas continues !)*
4. *Montrer que toute suite $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers une fonction $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{K})$ converge continuement sur A. La réciproque est-elle vraie ?*
5. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie compacte K. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *La suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers $f \in \mathscr{C}^0(K)$.*
   - *La suite $(f_n)_n$ est continuement convergente sur K vers f.*

Solution :

1. *Si la suite $(f_n)_n$ converge continuement vers f s ur A et si pour $x \in A$ on considère la suite constante $x_n = x$ alors :*
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
i.e. $(f_n)_n$ est simplement convergente sur A vers f.

2. *Soit donc* $(f_{n_k})_k$ *une sous-suite de la suite* $(f_n)_n$ *et* $(x_n)_n$ *une suite dans* A *convergente vers* $x \in A$. *Considérons alors la suite* $(y_m)_m$ *définie par*

$$y_m = \begin{cases} x_1 & \text{pour} \quad 1 \leq m \leq n_1, \\ x_2 & \text{pour} \quad n_1 < m \leq n_2, \\ \dots & .... \\ x_k & \text{pour} \quad n_k < m \leq n_{k+1} \\ \dots & .... \end{cases}$$

La suite $(y_m)_m$ *est bien entendu encore convergente vers* x *et on a donc*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x_m) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k).$$

3. *Avec la première question, si* $(f_n)_n$ *converge continuement vers* f *sur* A, *elle converge simplement sur* A *vers* f. *Montrons que* f *est continue sur* A *: soit* $x \in A$, $(x_n)_n \subset A$ *une suite convergente vers* x. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *par la convergence de* $(f_n(x_1))_n$ *vers* $f(x_1)$ *il existe* n_1 *(qui à priori dépend de* x_1*) tel que*

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $n_2 > n_1$ *tel que*

$$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En réitérant ce processus, on construit une suite strictement croissante d'entiers vérifiant

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.(1)$$

Mais avec la question précédente $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$, *si bien qu'il existe aussi un entier* k_0 *tel que*

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, k \geq k_0.(2)$$

Finalement (1) *et* (2) *assurent que*

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0$$

et f *est continue au point* x, *elle est donc continue sur* A.

4. - *Supposons maintenant que la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers une fonction continue* f *(les fonctions* f_n *n'étant pas continues, l'hypothèse de continuité sur* f *est essentielle vu la question précédente) et montrons que la convergence est continue sur* A. *Soit donc* $(x_n)_n \subset A$ *une suite convergente vers* $x \in A$. *Soit* $\varepsilon > 0$, *par convergence uniforme sur* A *nous avons*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{y\in A} |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.(3)$$

Et par continuité de f

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq n_1.(4)$$

Ainsi, pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, nous avons vu (3) et (4)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où la convergence continue sur A.

- La réciproque est fausse. Considérons par exemple $A =]0,1[$ et $f_n(x) = x^n$. Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_n$ simplement convergente sur $]0,1[$ vers la fonction f identiquement nulle n'est pas uniformément convergente sur $]0,1[$. Toutefois cette suite converge continuement sur $]0,1[$ vers f car pour toute suite $(x_n)_n \subset]0,1[$ convergente vers $x \in]0,1[$ il existe $0 < a < 1$ tel que $0 < x_n < a$ de sorte que

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n)| \leq a^n$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0 = f(x).$$

5. *-la condition nécéssaire ($\Rightarrow$) à été établie lors de la question précédente.*

   - Pour la condition suffisante ($\Leftarrow$), avec la question 2), nous savons déja que la limite f est continue sur K. Supposons maintenant que notre suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur K : il existe donc $\varepsilon_0 > 0$, une suite $(n_k)_k$ d'entiers et une suite $(x_k)_k$ dans K tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \ : \qquad |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0.(5)$$

   Comme K est compact on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite $(x_k)_k$ converge vers $x \in K$. Avec la question 1), il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall\, n \geq N_0.(6)$$

   Par continuité de f, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall\, n \geq N_1, (7)$$

   si bien qu'en combinant $(5), (6)$ et (7) on obtient pour n assez grand

$$\varepsilon_0 \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{2\varepsilon_0}{3}$$

   ce qui est absurde.

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathe- matical Library. AMS, 2001.