Séries entières et convergence uniforme

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Séries entières et convergence uniforme***

Pour une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq 1$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $D(0,1)$.*
2. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$.*
3. *La série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur $C(0,1)$.*

Solution :

1. *(1) $\implies$ 2)) :* *C'est la conséquence d'un corollaire presque immédiat (mais essentiel) du critére de Cauchy uniforme :* « Soient X un espace topologique, E un espace de Banach ; alors toute suite de fonctions $(f_n)_n \subset \mathscr{C}(X, B)$ qui converge uniformément sur une partie $Y \subset X$ converge encore uniformément sur $\overline{Y}$. » *Comme justification il suffit de remarquer que par continuité des applications f_n, le critère de Cauchy uniforme*
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ m, n \geq n_\varepsilon \implies \sup_{x \in Y} \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \varepsilon$$
implique
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ m, n \geq n_\varepsilon \implies \sup_{x \in \overline{Y}} \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \varepsilon$$
2. *Les implications (2) $\implies$)3) et (3) $\implies$ 2)) sont évidentes.*
3. *Il suffit donc par exemple d'établir (3) $\implies$ 2)) :* *Par convergence uniforme sur le cercle unité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon \implies |s_n(e^{i\theta})| = |\sum_{n_\varepsilon}^n a_k e^{ik\theta}| < \varepsilon$. On va effectuer une transformation d'Abel : soit $0 \leq r \leq 1$ et $n \geq n_\varepsilon + 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$*
$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n_\varepsilon+1}^n a_k r^k e^{ik\theta} \right| &= \left| \sum_{n_\varepsilon+1}^n r^k (s_k(e^{i\theta}) - s_{k-1}(e^{i\theta})) \right| \\
&= \left| -r^{n_\varepsilon+1} s_{n_\varepsilon}(e^{i\theta}) + r^n s_n(e^{i\theta}) + \sum_{n_\varepsilon+1}^n s_k(e^{i\theta})(r^k - r^{k+1}) \right| \\
&\leq \left| r^{n_\varepsilon+1} s_{n_\varepsilon}(e^{i\theta}) \right| + \left| r^n s_n(e^{i\theta}) \right| + \sum_{n_\varepsilon+1}^n \left(r^k - r^{k+1}\right) \left| s_k(e^{i\theta}) \right| \\
&\leq \varepsilon \left[r^{n_\varepsilon+1} + r^n + \sum_{n_\varepsilon+1}^n (r^k - r^{k+1}) \right] \\
&\leq 2\varepsilon r^{n_\varepsilon+1} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy uniforme est donc bien vérifié sur $\overline{D(0,1)}$, soit 2).

Remarque : *Le candidat à l'agrégation externe peut régler l'implication « délicate » (3) $\Longrightarrow$ 2)) trés simplement en invoquant le principe du maximum.*

Références