

Étude d'une série de fonctions

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Étude d'une série de fonctions

[1]-2006.

On considère une suite de fonctions $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant

$$|f_n(x)f_m(x)| \leq 2^{-|n-m|}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]. (\star)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que la somme $f = \sum_n f_n$ est bornée sur $[0, 1]$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Solution :

1. Soit $x \in [0, 1]$.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0}(x) \neq 0$, avec $(\star)$ on a

$$|f_n(x)f_{n_0}(x)| \leq 2^{-|n-n_0|}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

soit

$$|f_n(x)| \leq 2^{-n} \frac{2^{n_0}}{|f_{n_0}(x)|}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où la convergence absolue de la série $\sum_n f_n(x)$ par critère de comparaison.

Sinon $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la convergence au point x est évidente.

Avec la question précédente la convergence simple est absolue et la suite $(|f_n|)_n$ vérifie aussi $(\star)$: comme $|\sum_n f_n| \leq \sum_n |f_n|$ il est donc suffisant de supposer les fonction f_n positives.

Soit $x \in [0, 1]$ fixé, posons pour $k \in \mathbb{N}$

$$I_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{k+1}} < f_n(x) \leq \frac{1}{2^k} \right\}.$$

Soient $n, p \in I_k$ on a

$$\frac{1}{2^{2k+2}} < f_n(x)f_p(x) \leq \frac{1}{2^{|n-p|}}$$

soit $|n - p| \leq 2k + 2$ qui implique $\text{card}(I_k) \leq 2k + 2 + 1$. La série $\sum_n f_n(x)$ étant à termes positifs on peut sommer par paquets :

$$0 \leq f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \in I_n} f_k(x) \leq \sum_{n \geq 0} (2n + 3) \cdot \frac{1}{2^n} = 10.$$

f est donc bornée par 10 sur $[0, 1]$ (bien remarquer que nous n'avons pas utilisé la continuité des applications f_n).

Montrons qu'en général il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$. Pour cela, considérons une suite strictement croissante $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < 1$ de limite 1 et les applications $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$ définies de la manière suivante :

$$\rightsquigarrow 0 \leq f_n \leq 1,$$

$$\rightsquigarrow f_n \equiv 0 \text{ sur } [0, 1] \setminus [x_n, x_{n+1}] \text{ et } f_n(y_n) = 1 \text{ où } y_n = (x_n + x_{n+1})/2,$$

$$\rightsquigarrow f_n \text{ est affine sur } [x_n, y_n] \text{ et } [y_n, x_{n+1}].$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la suite $(f_n)_n$ ainsi définie vérifie $(\star)$, en effet les supports des applications f_n étant mutuellement disjoints

$$|f_n(x)f_m(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ |f_n(x)|^2 \leq 1 & \text{si } n = m \end{cases} \leq 2^{-|n-m|}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, comme (toujours par disjonction des supports)

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) = f_n(x) \quad \text{où } x \in [x_n, x_{n+1}],$$

en particulier

$$f(y_n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$f(0) = 0, \quad \lim_n y_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_n f(y_n) = 1,$$

f est donc discontinue au point 1 et la convergence ne peut être uniforme sur $[0, 1]$.

Remarque : Dans l'exemple précédent, f est discontinue au point 1 en lequel toutes les applications f_n s'annulent ; il est en fait assez facile de vérifier qu'en un point $x \in [0, 1]$ où il existe un entier n tel que $f_n(x) \neq 0$ la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur un voisinage de x et f est par suite continue au point x .

Références

- [3] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.