À propos du produit de Cauchy

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ **À propos du produit de Cauchy**

[1].

1. *Montrer que le produit de Cauchy des deux séries convergentes de termes général* $a_n = b_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$ *diverge.*
2. *Montrer que le produit de Cauchy des deux séries grossièrement divergentes de termes généraux* $a_0 = 3,\ a_n = 3^n,\ b_0 = -2,\ b_n = 2^n,\ n \in \mathbb{N}^\star$ *est absolument convergent.*

Solution :

1. *Le terme général du produit de Cauchy des deux séries (convergentes car alternées) est*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}},$$

donc

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

d'où la grossière divergence du produit de Cauchy des deux séries $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$.

2. *Nous avons cette fois-ci* $c_0 = -6$ *et pour* $n \in \mathbb{N}^\star$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 3 \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \cdot 3^{n-k} - 2 \cdot 3^n$$
$$= 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 2 \cdot 3^n$$
$$= 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot \frac{2/3 - (2/3)^n}{1 - 2/3} - 2 \cdot 3^n = 0,$$

d'où la convergence absolue du produit de Cauchy.

Remarque : *Le produit de Cauchy deux séries absolument convergentes est absolument convergent, le produit de Cauchy d'une série absolument convergente et d'une série convergente est convergent, pour le reste tout peut arriver comme on peut le vérifier dans les exemples précédents.*

Références

[1] D.D. Bonar and M.J. Khoury. Real Infinite Series. Classroom Ressource Materials. M.A.A., 2006.