Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ est l'équation d'une sphère $\mathscr{S}$ dont on déterminera le centre et le rayon.*
2. *Étudier l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$. On précisera les éléments géométriques de cette intersection.*

Solution :

1. *L'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ s'écrit aussi : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 3^2$. On reconnaît l'équation d'une sphère de centre $\boxed{\Omega 1, 2, 3}$ et de rayon $\boxed{3}$.*
2. *On applique le cours : $d(\Omega, \mathscr{P}) = \dfrac{|x_\omega + y_\Omega + z_\Omega - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} < 3$. $\mathscr{S} \cap \mathscr{P}$ est donc un cercle. Déterminons son centre et son rayon. Soit A un point de ce cercle et B le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$. Le triangle ΩAB est rectangle en B, OA est un rayon de la sphère $\mathscr{S}$ donc $OA = 3$ et de plus : $OB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on trouve $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Par conséquent, le rayon du cercle intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}$ vaut $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$. Il reste à déterminer les coordonnées du point B qui est aussi le centre de ce cercle. La droite (ΩB) est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et est donc dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$ qui est normal à $\mathscr{P}$. Cette droite est donc paramétrée par : $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2+t \\ z &= 3+t \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$. Les coordonnées de B sont solutions du système : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ et donc $\boxed{B\left|\begin{matrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{matrix}\right.}$.*

Références