Calcul d'une somme de série

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul d'une somme de série***

Putnam 2001 où [1].
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ désigne l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{[n]} + 2^{-[n]}}{2^n} = 3.$$

Solution : *Bien remarquer que $[n]$ est toujours bien défini car l'équation $\sqrt{n} = k+1/2,\ k, n \in \mathbb{N}$ n'a pas de solutions.*

Comme souvent dans ce genre d'exercice l'astuce consiste à sommer paquets (ce qui est parfaitement légitime puisque la série est à termes positifs...sous reserve de convergence...) suivant les valeurs de $[n]$:

$$\begin{aligned}
[n] = k &\Leftrightarrow k - 1/2 < \sqrt{n} < k + 1/2 \\
&\Leftrightarrow k^2 - k + 1/4 < n < k^2 + k + 1/4 \\
&\Leftrightarrow k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k \quad (\textit{car } n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{[n]} + 2^{-[n]}}{2^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} (2^k + 2^{-k}) 2^{-n} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k + 2^{-k}) 2^{-k^2+k-1} \sum_{n=0}^{2k-1} 2^{-n} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k + 2^{-k}) 2^{-k^2+k-1} \cdot \frac{1 - 2^{-2k+2}}{1 - 2^{-1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k + 2^{-k})(2^{-k^2+k} - 2^{-k^2-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k(k-2)} - 2^{-k(k+2)}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k-2)} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k-2)} - \sum_{l=3}^{\infty} 2^{-l(l-2)} \quad (l = k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{2} 2^{-k(k-2)} = 2 + 1 + 3.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Références

[1] D.D. Bonar and M.J. Khoury. Real Infinite Series. Classroom Ressource Materials. M.A.A., 2006.