Divergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Divergence de la série*** $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}$

Putnam (1949)

En considérant les blocs $N_l = \{\, k \in \mathbb{N} \,:\, 2\pi l - \pi/3 \,\leq \log(\log(k)) \leq 2\pi l\}$, *établir la divergence de la série* $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}$.

Solution : *L'indication est claire : si la série converge, par le critère de Cauchy elle ne peut admettre de blocs de termes consécutifs de somme arbitrairement grande. Observons donc les quantités*

$$S_l = \sum_{k\in N_l} \frac{\cos(\log(\log(n)))}{\log(n)}.$$

(on peut remarquer que la croissance de $k \mapsto \log_2(k)$ *assure que* N_k *est bien constitué d'éléments consécutifs) On peut aussi écrire*

$$N_l = \{\, k \in \mathbb{N} : \exp(\exp(2\pi l - \pi/3)) \leq k \leq \exp(\exp(2\pi l))\}$$

et il en résulte

$$\begin{aligned} \sharp(N_l) &\geq \exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\exp(2\pi l - \pi/3)) - 1 \\ &= \exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\alpha \exp(2\pi l)) - 1 \end{aligned}$$

où $0 < \alpha = \exp(-\pi/3) < 1$. *Ainsi, pour* $k \in N_l$ *on a la minoration*

$$\frac{\cos(\log_2(k))}{\log(k)} \geq \frac{\cos(-\pi/3)}{\exp(2\pi l)} = \frac{1}{2\exp(2\pi l)},$$

d'où

$$S_l \geq \frac{\exp(\exp(2\pi l)) - \exp(\alpha \exp(2\pi l)) - 1}{2\exp(2\pi l)}.$$

Pour conclure il n'y a plus qu'à remarquer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x) - \exp(\alpha x) - 1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{2x}\left[1 - \exp(x(\alpha - 1)) - \exp(-x)\right] = +\infty$$

(le terme entre crochets tendant vers 1 *car* $0 < \alpha < 1$*).*

Références