Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Calcul de*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$

[1], 1984/7.
Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)} = \frac{7-\sqrt{5}}{2},$$

où $(F(n))_n$ *est la suite de Fibonacci :*

$$F(0) = 0, F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-1) + F(n-2), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Solution : *Il est bien connu (donner une référence, [?], [?]...) que*

$$F(n) = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{avec } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ ab = -1,$$

ce qui nous donne (avec l'identité remarquable $c^2 - d^2 = (c+d)(c-d)$*)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)} = 1 + \sqrt{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a^{2^n} - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+1}} - 1} \right] = 1 + \frac{\sqrt{5}}{a^2 - 1} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

aprés télescopage dans la seconde série.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.