

Un exercice sur les séries numériques

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

23 mai 2024

Exercice 0.1 ★ Un exercice sur les séries numériques

Soient $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_n a_n$ converge, $(b_n)_n$ une suite bornée de réels positifs. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} (b_1 + \cdots + b_n)(a_n - a_{n-1})$$

converge.

Solution : Posons $u_n = (b_1 + \cdots + b_n)(a_{n-1} - a_n)$, $n \geq 2$ et notons $S_N = \sum_{i=2}^N u_i$ ses sommes partielles. Soit $M > 0$ tel que $|b_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(a_n)_n$ étant décroissante on a $0 \leq u_n \leq M(a_{n-1} - a_n) \leq nM(a_{n-1} - a_n)$ d'où

$$0 \leq S_N \leq M \sum_{i=2}^N n(a_{n-1} - a_n) = M \left(a_1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i \right) \leq M \left(a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right).$$

La suite croissante $(S_N)_N$ est bornée, donc convergente, il en est donc de même de la série $\sum_{n \geq 1} (b_1 + \cdots + b_n)(a_n - a_{n-1}) = -\sum_n u_n = -\lim_N S_N$.

Références