Un exercice sur les séries numériques

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Un exercice sur les séries numériques***

Soient $(a_n)_n$ *une suite décroissante de réels positifs telle que* $\sum_n a_n$ *converge,* $(b_n)_n$ *une suite bornée de réels posititifs. Montrer que la série*

$$\sum_{n\geq 1}(b_1+\cdots+b_n)(a_n-a_{n-1})$$

converge.

Solution : *Posons* $u_n=(b_1+\cdots+b_n)(a_{n-1}-a_n),\ n\geq 2$ *et notons* $S_N=\sum_{i=2}^N u_i$ *ses sommes partielles. Soit* $M>0$ *tel que* $|b_n|\leq M,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$*. La suite* $(a_n)_n$ *étant décroissante on a* $0\leq u_n\leq M(a_{n-1}-a_n)\leq nM(a_{n-1}-a_n)$ d'où

$$0\leq S_N\leq M\sum_{i=2}^N n(a_{n-1}-a_n)=M\left(a_1+\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\leq M\left(a_1+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right).$$

La suite croissante $(S_N)_N$ *est bornée, donc convergente, il en est donc de même de la série* $\sum_{n\geq 1}(b_1+\cdots+b_n)(a_n-a_{n-1})=-\sum_n u_n=-\lim_N S_N$*.*

Références